Mirjam Bon Klanjšček • Darjo Felda
Sonja France • Mateja Škrlec

MATEMATIKA 4

Zbirka nalog za gimnazije

DZS

Zbirko nalog so napisali mag. Mirjam Bon Klanjšček, dr. Darjo Felda, Sonja France, prof., in spec. Mateja Škrlec, prof.

MATEMATIKA 4
Zbirka nalog za gimnazije

Ilustriral Uroš Hrovat

Fotografija na naslovnici *M. C. Escher's "Circle Limit III" © 2012 The M.C. Escher Company-*
Holland. All rights reserved. www.mcescher.com

Fotografije so prispevali Bedenk & Co, D. n. o., © Bora Ucak | Dreamstime.com,
in Arhiv DZS, d. d.

ehnične risbe je izdelala Ksenija Konvalinka

Rokopis je jezikovno pregledala Jasna Berčon

Uredila Soraya Sternad

Likovno-grafično uredila Saša Hanuna

Oblikovala Ksenija Konvalinka

Opremo oblikovala Ksenija Konvalinka

Glavni urednik Vasja Kožuh

Izvršna direktorica Divizije založništev Ada de Costa Petan

Vedež
poln znanja
http://vedez.dzs.si

znanje uresničuje sanje
DZS, d. d., DIVIZIJA ZALOŽNIŠTEV
IZOBRAŽEVALNO ZALOŽNIŠTVO
http://www.dzs.si
e-pošta: info.narocila@dzs.si
tel. št.: 01/ 306 98 79

VSEBINA

LEGENDA

* Težka naloga

Posebna znanja

Izbirna vsebina

Raziskuj z računalnikom

1. ZAPOREDJA

Zaporedje je funkcija, ki množico naravnih števil ali pa njeno podmnožico preslika v množico realnih števil.

$\mathbb{N}$	1	2	3	4	$\ldots$	n
$f\colon\ \mathbb{N} \to \mathbb{R}$	$f(1)$	$f(2)$	$f(3)$	$f(4)$	$\ldots$	$f(n)$
Oznaka	$a_1 = f(1)$	$a_2 = f(2)$	$a_3 = f(3)$	$a_4 = f(4)$	$\ldots$	$a_n = f(n)$

$a_1,\ a_2,\ a_3,\ \ldots,\ a_n,\ \ldots$	Členi zaporedja.
a_1	Prvi ali začetni člen zaporedja.
a_n	Splošni člen zaporedja.
$a_1,\ a_2,\ a_3,\ \ldots,\ a_n$	Končno zaporedje ima končno mnogo členov.
$a_1,\ a_2,\ a_3,\ \ldots,\ a_n,\ \ldots$	Neskončno zaporedje ima neskončno mnogo členov.
$a_1,\ a_1,\ a_1,\ \ldots$	Konstantno zaporedje ima vse člene med seboj enake.

Graf zaporedja s splošnim členom a_n je množica točk $(1, a_1),\ (2, a_2),\ (3, a_3)\ \ldots$

Zaporedje je podano **rekurzivno**, če splošni člen a_n izračunamo s pomočjo predhodnih členov $a_{n-1},\ a_{n-2}\ \ldots$

1. Izračunaj prvih pet členov zaporedja in nariši graf.

   a) $a_n = n^2$ b) $a_n = \frac{n}{2n+1}$ c) $a_n = \frac{(-1)^n}{n}$

2. Danih je prvih pet členov zaporedja s splošnim členom $a_n,\ b_n$ in c_n. Zapiši vsaj en možen predpis za splošni člen.

   a) a_n: $1, 2, 3, 4, 5$ b_n: $2, 4, 6, 8, 10$ c_n: $1, 3, 5, 7, 9$

   b) a_n: $3, 6, 9, 12, 15$ b_n: $4, 7, 10, 13, 16$ c_n: $2, 5, 8, 11, 14$

   c) a_n: $4, 8, 12, 16, 20$ b_n: $10, 14, 18, 22, 26$ c_n: $20, 16, 12, 8, 4$

   č) a_n: $\frac{5}{10}, \frac{7}{12}, \frac{9}{14}, \frac{11}{16}, \frac{13}{18}$ b_n: $\frac{16}{9}, \frac{21}{13}, \frac{26}{17}, \frac{31}{21}, \frac{36}{25}$ c_n: $\frac{10}{11}, \frac{7}{15}, \frac{4}{19}, \frac{1}{23}, -\frac{2}{27}$

   d) a_n: $1, 4, 9, 16, 25$ b_n: $1, 8, 27, 64, 125$ c_n: $1, -4, 9, -16, 25$

   e) a_n: $2, 4, 8, 16, 32$ b_n: $8, 16, 32, 64, 128$ c_n: $2, 9, 28, 65, 126$

   f) a_n: $\frac{1}{2}, \frac{4}{4}, \frac{9}{8}, \frac{16}{16}, \frac{25}{32}$ b_n: $1, \frac{2}{3}, \frac{4}{9}, \frac{8}{27}, \frac{16}{81}$ c_n: $-\frac{8}{9}, \frac{27}{16}, -\frac{64}{25}, \frac{125}{36}, -\frac{2216}{49}$

   g) a_n: $1, 0, 1, 0, 1$ b_n: $0, 1, 0, 1, 0$ c_n: $1, 0, 3, 0, 5$

3. Zapiši splošni člen zaporedja

   a) $\frac{5}{3}, \frac{7}{10}, \frac{9}{17}, \ldots$ b) $\frac{4}{3}, \frac{7}{5}, \frac{10}{7}, \ldots$ c) $\frac{1}{3\cdot 5}, \frac{1}{5\cdot 7}, \frac{1}{7\cdot 9}, \ldots$ č) $1\cdot 1, 2\cdot 3, 3\cdot 5, 4\cdot 7, \ldots$

4. Zapiši predpis za splošni člen zaporedja, ki ga sestavljajo opisana naravna števila, urejena po velikosti od najmanjšega naprej.

   a) vsa naravna števila b) soda števila

   c) liha števila č) večkratniki števila 3

   d) števila, ki dajo pri deljenju s 3 ostanek 2 e) števila, ki dajo pri deljenju s 7 ostanek 5

5. Zapiši konstantno zaporedje šestih členov, katerih zmnožek je $1\,771\,561$. Tretji člen tega zaporedja je negativen.

6. Zaporedje ima šest členov, katerih vsota je 372. Vsak člen razen prvega je za 1 večji od dvakratnika člena pred njim. Zapiši to zaporedje.

7. Dano je zaporedje s splošnim členom $a_n = n^2 - 4n + 13$.

a) Izračunaj dvajseti člen.

b) Ali je 5631 člen zaporedja?

c) Od vključno katerega člena naprej so členi večji od $10\,000$?

8. Dano je zaporedje s splošnim členom $a_n = \frac{2n+15}{3n+3}$.

a) Izračunaj stoti člen na tri mesta natančno.

b) Ali je $0{,}671$ člen zaporedja?

c) Od vključno katerega člena naprej so členi manjši od $0{,}6667$?

9. Dano je zaporedje s splošnim členom $a_n = \cos\left(\frac{n\pi}{2}\right)$.

a) Zapiši prvih deset členov.

b) Izračunaj 102. člen.

c) Izračunaj vsoto prvih 335 členov.

10. Dano je zaporedje s splošnim členom $a_n = \log(n+3) - 2\log\sqrt{11n-1}$

a) Izračunaj dvajseti člen na štiri mesta natančno.

b) Kateri člen zaporedja je enak -1?

c) Koliko členov zaporedja je večjih od -1?

11. Zapiši prvih pet členov zaporedja, podanega z rekurzivnim predpisom.

a) $a_1 = 5,\ a_{n+1} = a_n + 3$

b) $a_1 = -2,\ a_n = a_{n-1}^2 + 1$

c) $a_1 = 3,\ a_2 = 5,\ a_{n+2} = a_{n+1} + 2 \cdot a_n$

č) $a_1 = 1,\ a_2 = 2,\ a_{n+2} = a_n + 2a_{n+1} + 1$

12. Prvi člen zaporedja je enak 44, preostale člene pa dobimo po formuli $a_{n+1} = a_n + 10$. Izračunaj prvih pet členov zaporedja. Splošni člen izrazi kot funkcijo indeksa in izračunaj a_{1000}.

13. V zaporedju je prvi člen enak 1, preostale člene pa dobimo po formuli $a_{n+1} = 2a_n + 1$. Izračunaj prvih pet členov zaporedja. Splošni člen izrazi kot funkcijo indeksa in izračunaj a_{500}.

14.* Vsota prvih petih členov zaporedja z rekurzivnim predpisom $a_{n+1} = \frac{n}{a_n}$ je enaka $\frac{173}{6}$. Izračunaj tretji člen.

15.* Zapiši neznani člen zaporedja.

a) $5, 10, 0, 20, 5, 30, x, 40, 15, 50$

b) $-3, x, -1, -1, -2, -3, -5, -8$

c) $2, 6, x, 120, 720, 5040$

č) $3, 3, 11, -5, x, -13, 27, -21, 35$

d) $\frac{1}{2}, 0, -1, -3, x, -15, -31$

e) $20, 19, 17, x, 10, 5, -1$

f) $5, 7, 4, 9, x, 11, 2, 13, 1$

g) $2, x, 26, 80, 242, 728$

16. Naraščajoče zaporedje $2, 3, 5, 6, 7 \ \ldots$ sestavljajo vsa naravna števila, katerih koren ni naravno število. Izračunaj stoti člen.

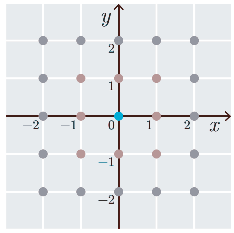
17. Drugi člen zaporedja je za 1 večji od prvega, tretji za 2 večji od drugega, četrti za 3 večji od tretjega $\ldots$

a) Zapiši prvih deset členov zaporedja, če je prvi člen enak 1.

b) Zapiši prvih deset členov zaporedja, če je prvi člen enak 2.

c) Vsak posamezni člen zaporedja iz točke a) zamenjaj s črko L, če je člen liho število, in s črko S, če je ta sodo število. Ali razbereš kak vzorec? Kaj pa, če enako narediš s členi zaporedja iz točke b)?

18. V koordinatni sistem rišemo točke s celoštevilskimi koordinatami. V prvem koraku narišemo modro točko, v drugem dorišemo vse rjave točke, v tretjem dorišemo vse sive točke $\ldots$
Koliko točk:



a) je na sliki po 77. koraku,

b) dorišemo na 111. koraku,

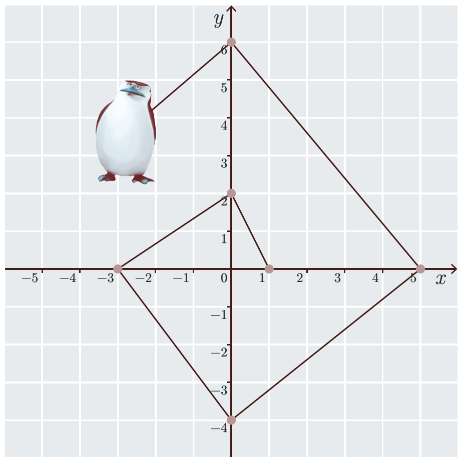
c) leži na simetrali lihih ali na simetrali sodih kvadrantov po 120. koraku,

č) narisanih do vključno 200. koraka, ima obe koordinati negativni?

19. Matko se odpravi na sprehod po koordinatnem sistemu, kot prikazuje slika. Njegova pot je sestavljena iz ravnih odsekov.

1. odsek: $(1,0) \to (0,2)$
2. odsek: $(0,2) \to (-3,0)$
3. odsek: $(-3,0) \to (0,-4)$
4. odsek: $(0,-4) \to (5,0)$
5. odsek: $(5,0) \to (0,6)$

$\ldots$



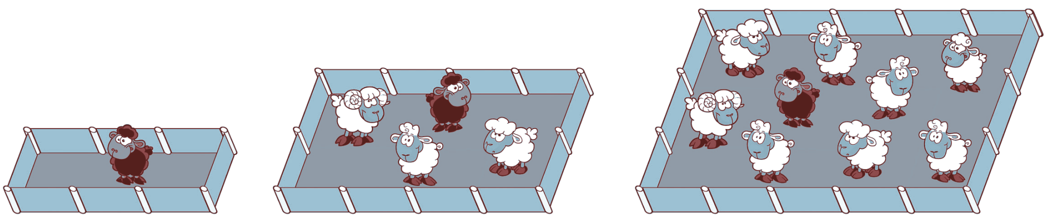
a) Ali je Matko kdaj v točki $(-456,0)$?

b) Zapiši predpis a_n za zaporedje ordinat vseh točk, skozi katere potuje Matko, in ležijo na pozitivnem poltraku ordinatne osi.

c) V kateri točki je Matko, ko prehodi 63. odsek?

č) Koliko je dolg 100. odsek?

20. Gospod Lukman prvo leto sestavi ograjo pravokotne oblike iz osmih enakih desk in vanjo naseli eno črno ovco. Drugo leto dolžino in širino ograde poveča za eno desko ter doda tri bele ovce. Tretje leto spet podaljša dolžino in širino ograde za eno desko ter doda pet belih ovc. Tako vsako leto podaljša dolžino in širino ograde za eno desko ter doda dve beli ovci več kot prejšnje leto.



a) Iz koliko desk je zgrajena ograda ob koncu 7. leta?

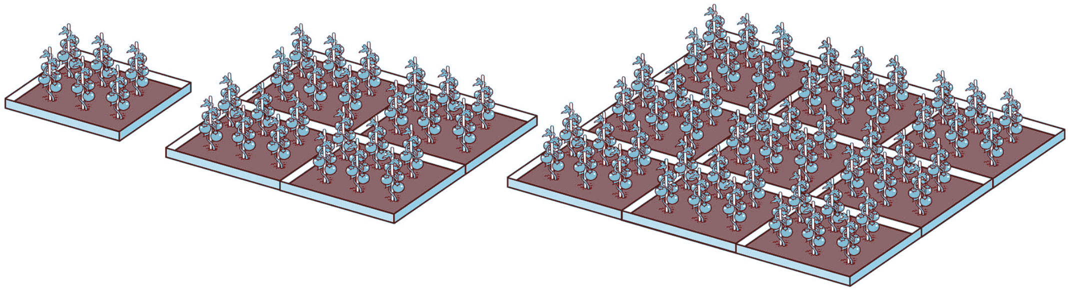
b) Zapiši predpis za število desk v odvisnosti od števila let.

c) Koliko ovc ima gospod Lukman ob koncu 15. leta?

č) Zapiši predpis za število ovc v odvisnosti od števila let.

d) Izračunaj, po koliko letih je belih ovc ravno petkrat toliko kot desk v ogradi.

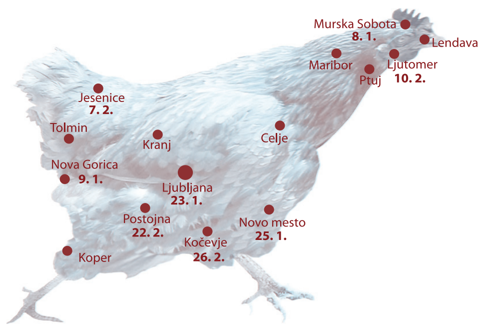
21. Gospod Kuzmič se ukvarja s pridelavo paradižnika. Prvo leto naredi gredo iz štirih enako dolgih desk in vanjo posadi šest paradižnikov. Drugo leto dogradi 3 grede (glej sliko), za kar porabi 8 desk, in v vsako posadi šest paradižnikov. Tretje leto dogradi 5 gred, za kar porabi 12 desk, in v vsako posadi šest paradižnikov. S postopkom nadaljuje tudi naslednja leta.



Koliko gred, koliko paradižnikov in koliko desk ima gospod Kuzmič ob koncu:

a) četrtega leta b) desetega leta c) n-tega leta

22.* V Putkolandiji so se leta 2012 dogajali ropi. Ropar je udaril devetkrat. Ob osmem ropu so na kraju zločina našli zemljevid z zapisanimi kraji in datumi, ki je na sliki. Nepridiprav je na datum, zapisan ob posameznem mestu, oropal največjo banko v tem mestu. Ujeli so ga pri devetem ropu, pri tem pa so jim pomagali slavisti in matematiki. Kje in kdaj bi bil deseti rop?



2. LASTNOSTI ZAPOREDIJ

ZAPOREDJE

naraščajoče	padajoče
če za vsak $n \in \mathbb{N}$ velja: $a_n \leq a_{n+1}$	če za vsak $n \in \mathbb{N}$ velja: $a_n \geq a_{n+1}$
strogo naraščajoče	**strogo padajoče**
če za vsak $n \in \mathbb{N}$ velja: $a_n < a_{n+1}$	če za vsak $n \in \mathbb{N}$ velja: $a_n > a_{n+1}$
monotono	**alternirajoče**
če je naraščajoče ali padajoče.	če vsakemu členu neposredno sledi nasprotno predznačen člen.

navzgor omejeno	navzdol omejeno	omejeno
če obstaja število M, da za vsak $n \in \mathbb{N}$ velja:	če obstaja število m, da za vsak $n \in \mathbb{N}$ velja:	če obstajata števili m in M, da za vsak $n \in \mathbb{N}$ velja:
$a_n \leq M$	$a_n \geq m$	$m \leq a_n \leq M$
M ... zgornja meja zaporedja	m ... spodnja meja zaporedja	M ... zgornja meja zaporedja m ... spodnja meja zaporedja

Natančna zgornja meja navzgor omejenega zaporedja je najmanjša izmed vseh zgornjih mej zaporedja. Zaporedje nima natančne zgornje meje, če najmanjša izmed vseh zgornjih mej ne obstaja.

Natančna spodnja meja navzdol omejenega zaporedja je največja izmed vseh spodnjih mej zaporedja, če ta obstaja. Zaporedje nima natančne spodnje meje, če najmanjša izmed vseh spodnjih mej ne obstaja.

1. Splošni člen zaporedja je $a_n = \frac{3}{n}$.
   - a) Izračunaj prvih šest členov in nariši graf.
   - b) Ali je $3{,}1$ zgornja meja? Ali je natančna zgornja meja? Ali je ta zgornja meja tudi člen zaporedja?
   - c) Ali je 3 zgornja meja? Ali je natančna zgornja meja? Ali je ta zgornja meja tudi člen zaporedja?
   - č) Ali je -2 spodnja meja? Ali je natančna spodnja meja? Ali je ta spodnja meja tudi člen zaporedja?
   - d) Ali je 0 spodnja meja? Ali je natančna spodnja meja? Ali je ta spodnja meja tudi člen zaporedja?
   - e) Ali je zaporedje omejeno?

2. Splošni člen zaporedja je $a_n = 2n + 3$.
   - a) Izračunaj prvih šest členov in nariši graf.
   - b) Ali zaporedje narašča ali pada? Dokaži.
   - c) Ali je zaporedje omejeno?
   - č) Ali je 6363 člen zaporedja? Utemelji.
   - d) Koliko členov je manjših od $53\,562$?

3. Splošni člen zaporedja je $a_n = \frac{2n+1}{n+5}$.
   - a) Izračunaj prvih šest členov in nariši graf.
   - b) Ali zaporedje narašča ali pada? Dokaži.
   - c) Ali je zaporedje omejeno? Dokaži.
   - č) Koliko členov leži na intervalu $[1{\cdot}74, 1{\cdot}94)$?

4. Splošni člen zaporedja je $a_n = \frac{n}{-3n+1}$.

a) Izračunaj prvih šest členov in nariši graf.

b) Ali zaporedje narašča ali pada? Dokaži.

c) Ali je zaporedje omejeno? Dokaži.

č) Koliko členov leži na intervalu $\left[-\frac{200}{599}, -\frac{300}{899}\right)$?

5. Splošni člen zaporedja je $a_n = 3 \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^{n-2} + 1$.

a) Izračunaj prvih pet členov in nariši graf.

b) Ali zaporedje narašča ali pada? Dokaži.

c) Ali je zaporedje omejeno? Dokaži.

č) Kateri členi so manjši od $1{,}000001$?

6. Splošni člen zaporedja je $a_n = 2n^2 - 50n + 77$.

a) Izračunaj prvih šest členov in nariši graf.

b) Ali zaporedje narašča ali pada? Dokaži.

c) Ali je zaporedje omejeno?

č) Za katere vrednosti n so členi pozitivni?

7. Splošni člen zaporedja je $a_n = 2\log\left(n^2 + 7n + 1\right)$.

a) Izračunaj prvih šest členov in nariši graf.

b) Ali je zaporedje monotono? Dokaži.

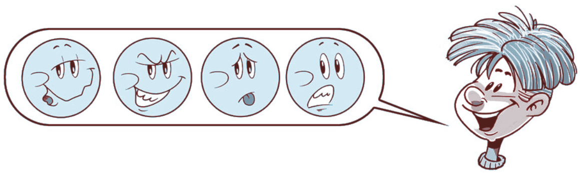
c) Ali je zaporedje omejeno?

č) Koliko členov je manjših od 10?

8. Določi splošni člen zaporedja $\frac{2}{7}, \frac{3}{10}, \frac{4}{13}, \ldots$ Prouči monotonost in omejenost tega zaporedja.

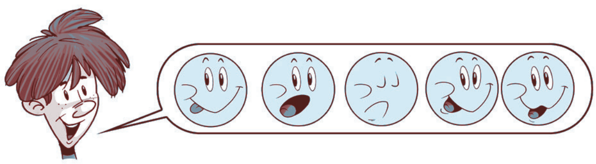
9.* Zapiši zaporedje s štirimi členi, ki ima naslednje lastnosti.

- Natančna zgornja meja je 5.
- Spodnja meja je -3.
- Členi so cela števila.
- Zaporedje ni padajoče.
- Prvi trije zaporedni členi tvorijo novo, strogo padajoče zaporedje, katerega zadnji člen je enak vsoti prvih dveh členov.



10.* Izpiši člene zaporedja, ki ima naslednje lastnosti.

- Navzgor je omejeno z 12.
- Ima 5 členov, ki so naravna števila.
- Trije členi so sodi, dva pa liha.
- Členi zavzamejo tri različne vrednosti.
  Členi, ki imajo enake vrednosti, stojijo skupaj.
- Največji člen je dvakratnik enega izmed preostalih členov.
- Zadnji člen je enak tretjini srednjega.
- Natanko en člen ni praštevilo.

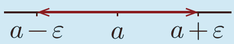


3. LIMITA ZAPOREDJA

Okolica števila na številski premici

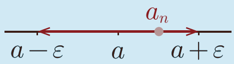
ε-okolica števila a na številski premici, ki jo označimo $O_\varepsilon(a)$, je interval $(a-\varepsilon, a+\varepsilon)$.

$$O_\varepsilon(a) = (a-\varepsilon, a+\varepsilon)$$



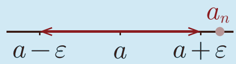
Člen a_n leži v $O_\varepsilon(a)$, če velja:

$$|a-a_n| < \varepsilon$$



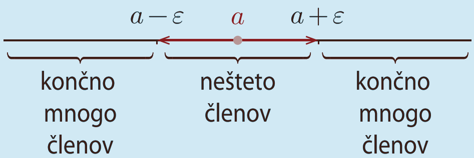
Člen a_n leži izven $O_\varepsilon(a)$, če velja:

$$|a-a_n| \geq \varepsilon$$



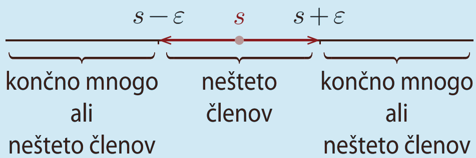
Limita zaporedja

Število a je limita zaporedja, če je v vsaki še tako majhni ε-okolici števila a nešteto členov zaporedja, izven te okolice pa jih je le končno mnogo.



Stekališče zaporedja

Število s je stekališče zaporedja, če je v vsaki še tako majhni ε-okolici števila s nešteto členov zaporedja, izven te okolice pa jih je lahko tudi nešteto.



Število a je limita zaporedja s splošnim členom a_n, če lahko za vsak $\varepsilon > 0$ določimo tako naravno število N, da za vse $n > N$ velja: $|a - a_n| < \varepsilon$. Tedaj zapišemo $a = \lim\limits_{n\to\infty} a_n$.

Konvergentno zaporedje

Zaporedje je konvergentno, če ima limito.

Divergentno zaporedje

Zaporedje je divergentno, če nima limite.

1. Na številski premici nariši:
   a) ε-okolico števila 3, če je $\varepsilon = 1$
   b) $O_{0,7}(5)$

2. Ali število $3{,}0012$ leži v:
   a) ε-okolici števila 3, če je $\varepsilon = 10^{-3}$,
   b) ε-okolici števila $3{,}1$, če je $\varepsilon = 10^{-2}$?

3. Kateri členi zaporedja s splošnim členom $a_n = \frac{5}{n}$ ležijo:
   a) znotraj $O_{0,01}(0)$,
   b) zunaj $O_{0,001}(0)$?

4. Kateri členi zaporedja s splošnim členom $a_n = 2^{-n+3} - 2$ ležijo:
   a) znotraj ε-okolice števila -2, če je $\varepsilon = \frac{1}{1024}$,
   b) zunaj ε-okolice števila -2, če je $\varepsilon = 10^{-3}$?

5. Izračunaj nekaj začetnih členov zaporedja s splošnim členom a_n, b_n in c_n. Za posamezno zaporedje ugotovi, koliko ima stekališč, ali ima limito, ali je konvergentno ali divergentno.

a) $a_n = n^2$ $\quad b_n = 2n + 5$ $\quad c_n = n^3 - 2n^2 + 4$

b) $a_n = \cos\frac{n\pi}{2}$ $\quad b_n = \cos n\pi$ $\quad c_n = \cos 2n\pi$

c) $a_n = (-1)^n$ $\quad b_n = (-1)^n \cdot n + n$ $\quad c_n = (-1)^n \cdot 2^{-n}$

č) $a_n = \frac{(-1)^n}{n}$ $\quad b_n = \frac{n+3}{n+1}$ $\quad c_n = \frac{(-1)^n \cdot n}{n+2}$

6. Dano je zaporedje s splošnim členom $a_n = \frac{n}{n+3}$.

a) Kateri členi ležijo izven okolice $O_{0,001}(1)$?

b) Določi stekališča, če obstajajo.

c) Določi limito, če obstaja.

č) Ali je zaporedje konvergentno?

7. Dano je zaporedje s splošnim členom $a_n = \cos \pi n$.

a) Kateri členi ležijo v okolici $O_{0,1}(1)$?

b) Določi stekališča, če obstajajo.

c) Določi limito, če obstaja.

č) Ali je zaporedje konvergentno?

8. Dano je zaporedje s splošnim členom $a_n = 2\sin\left(\frac{\pi}{4} \cdot n\right)$.

a) Kateri členi ležijo v okolici $O_{0,02}(1)$?

b) Določi stekališča, če obstajajo.

c) Določi limito, če obstaja.

č) Ali je zaporedje konvergentno?

9. Dano je zaporedje s splošnim členom $a_n = \left(\frac{1}{2}\right)^{n-1} + 1$.

a) Koliko členov leži izven $O_{0,02}(1)$?

b) Določi stekališča, če obstajajo.

c) Določi limito, če obstaja.

č) Ali je zaporedje konvergentno?

10. Dano je zaporedje $\frac{1}{2}, \frac{3}{7}, \frac{5}{12}, \frac{7}{17}, \ldots$

a) Določi splošni člen, prouči monotonost in omejenost.

b) Kateri členi ležijo v ε-okolici limite zaporedja, če je $\varepsilon = 10^{-3}$?

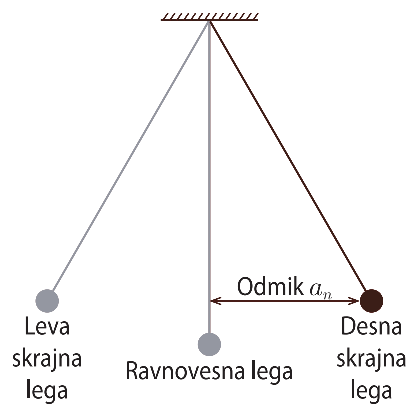
c) Zapiši najmanjši zaprti interval, v katerem ležijo vsi členi zaporedja.

11. Nitno nihalo niha dušeno, kar pomeni, da se med nihanjem odmiki od ravnovesne lege postopoma zmanjšujejo. Predpis $a_n = 20 \cdot 0{,}85^{n-1}$ opisuje zaporedje odmikov v desni skrajni legi, merjenih v centimetrih. Ko se nihanje začne, je nihalo prvič v desni skrajni legi in je $n = 1$.

a) Koliko je nihalo oddaljeno od ravnovesne lege, ko je desetič v desni skrajni legi?

b) Katera je limitna lega nihala po velikem številu nihajev? Določi limito zaporedja odmikov $\{a_n\}$.

c) Kolikokrat vidi človek s prostim očesom nihalo v desni skrajni legi, če razloči le odmike od skrajne lege, ki so večji od $0{,}1$ mm?



4. RAČUNANJE Z LIMITAMI

Računanje z limitami

Limita konstantnega zaporedja $a_n = c,\ c \in \mathbb{R}$ $\lim\limits_{n\to\infty} c = c$

Limita zaporedja $a_n = \frac{p(n)}{q(n)}$; p, q polinoma, $q \neq 0$		
stopnja $p <$ stopnja q $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{p(n)}{q(n)} = 0,$	stopnja $p =$ stopnja q $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{p(n)}{q(n)} = \frac{\text{vodilni koeficient } p}{\text{vodilni koeficient } q}$	stopnja $p >$ stopnja q $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{p(n)}{q(n)}$ ne obstaja

Limita zaporedja $a_n = a^n,\ a \in R^+ - \{1\}$	
$0 < a < 1$ $\lim\limits_{n\to\infty} a^n = 0$	$1 < a$ $\lim\limits_{n\to\infty} a^n$ ne obstaja

Limita zaporedja $a_n = \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n$ $\lim\limits_{n\to\infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n = e$

Pravila za računanje z limitami

$\lim\limits_{n\to\infty} (a_n + b_n) = \lim\limits_{n\to\infty} a_n + \lim\limits_{n\to\infty} b_n$

$\lim\limits_{n\to\infty} (a_n - b_n) = \lim\limits_{n\to\infty} a_n - \lim\limits_{n\to\infty} b_n$

$\lim\limits_{n\to\infty} (a_n \cdot b_n) = \lim\limits_{n\to\infty} a_n \cdot \lim\limits_{n\to\infty} b_n$

$\lim\limits_{n\to\infty} \left(\frac{a_n}{b_n}\right) = \frac{\lim\limits_{n\to\infty} a_n}{\lim\limits_{n\to\infty} b_n}\ (b_n \neq 0,\ \lim\limits_{n\to\infty} b_n \neq 0)$

$\lim\limits_{n\to\infty} (a_n)^k = \left(\lim\limits_{n\to\infty} a_n\right)^k,\ k \in \mathbb{N}$

$\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[k]{a_n} = \sqrt[k]{\lim\limits_{n\to\infty} a_n},\ k \in \mathbb{N}$

1. Izračunaj deseti in stoti člen zaporedja s splošnim členom a_n, b_n in c_n ter določi limito, če obstaja.

a) $a_n = \frac{6n^2+5}{2n^2+7}$ $\quad b_n = \frac{6n+5}{2n^2+7}$ $\quad c_n = \frac{6n^2+5}{2n+7}$

b) $a_n = \sqrt{n^2+1} + n$ $\quad b_n = \sqrt{n^2+1} - n$ $\quad c_n = \sqrt{n^2+1} - n^2$

c) $a_n = 4^n$ $\quad b_n = 0{,}4^n$ $\quad c_n = \left(\frac{2}{3}\right)^n$

č) $a_n = \left(4 + \frac{1}{n}\right)^n$ $\quad b_n = \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n$ $\quad c_n = \left(0,4 + \frac{1}{n}\right)^n$

2. Izračunaj limito zaporedja s splošnim členom a_n, če obstaja.

a) $a_n = \frac{2n+3}{n-4}$ $\quad$ b) $a_n = \frac{n^2-6n}{n^3+5n+1}$ $\quad$ c) $a_n = \frac{2n-9}{n^2}$

č) $a_n = \frac{n^2-6n}{1-2n}$ $\quad$ d) $a_n = \frac{5n^2-2n+1}{3-2n^2}$ $\quad$ e) $a_n = \frac{3n^2+7n}{5n-1}$

3. Izračunaj limito zaporedja s splošnim členom a_n, če obstaja.

a) $a_n = \left(\frac{2}{7}\right)^n + 1$ $\quad$ b) $a_n = \left(\frac{2}{3}\right)^n + 0,7^n$ $\quad$ c) $a_n = \left(\frac{5}{4}\right)^n + 16$

č) $a_n = \frac{3^n+5\cdot4^n}{2+4^n}$ $\quad$ d) $a_n = \frac{3\cdot5^n+4^n}{5^{n+1}+2}$ $\quad$ e) $a_n = \frac{2^n+1}{3^n+1}$

4. Izračunaj limito zaporedja s splošnim členom a_n, če obstaja.

a) $a_n = \sqrt{n^2+n} - n$ $\quad$ b) $a_n = \sqrt{n^2-4n+1} - n$

c) $a_n = 2n - \sqrt{4n^2+3n-2}$ $\quad$ č) $a_n = \sqrt{n-2} - \sqrt{n+3}$

d) $a_n = \frac{5}{\sqrt{n^2-2}-n}$ $\quad$ e) $a_n = \sqrt{n^2+n} - \sqrt{n^2+2n}$

f) $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{5n}{\sqrt{n^4+2n^3+1}-\sqrt{n^4-3n^3+9}}$ $\quad$ g) $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{8n}{\sqrt{n^4+5n^3+2}-\sqrt{n^4-n+6}}$

5. Izračunaj limito zaporedja s splošnim členom a_n, če obstaja.

a) $a_n = \left(\frac{n+5}{n}\right)^n$
b) $a_n = \left(\frac{n+3}{n}\right)^n$
c) $a_n = \left(\frac{n-2}{n}\right)^n$
č) $a_n = \left(\frac{n+3}{n+1}\right)^n$
d) $a_n = \left(1 + \frac{5}{n+1}\right)^{-2n}$
e) $a_n = \left(\frac{n+8}{n+2}\right)^{-3n}$
f) $a_n = \left(1 + \frac{3}{4n-5}\right)^{2n+5}$
g) $a_n = \left(\frac{3n-1}{3n+5}\right)^{5n+4}$

6. Dano je zaporedje s splošnim členom $a_n = \frac{6n-2}{3n+2}$.

a) Izračunaj limito zaporedja.
b) Kateri členi so od limite oddaljeni manj kot $0{,}002$?
c) Koliko členov leži izven ε-okolice limite, če je $\varepsilon = 10^{-2}$?

7. Dano je zaporedje s splošnim členom $a_n = \frac{3-2n}{2-3n}$.

a) Ali zaporedje narašča ali pada? Dokaži.
b) Ali je zaporedje omejeno? Dokaži.
c) Koliko členov leži izven ε-okolice limite, če je $\varepsilon = 0{,}002$?

8. Zaporedje je podano s splošnim členom $a_n = 1 - \frac{4}{2n+3}$.

a) Zapiši prve štiri člene zaporedja.
b) Pokaži, da je zaporedje naraščajoče.
c) Določi natančno spodnjo in natančno zgornjo mejo zaporedja.

9. Zaporedje je podano s splošnim členom $a_n = \frac{2n+1}{4n-1}$.

a) Prouči monotonost in omejenost zaporedja.
b) Zapiši vse člene, ki ne ležijo v ε-okolici limite zaporedja, če je $\varepsilon = \frac{1}{15}$.

10. Dano je zaporedje s splošnim členom $a_n = 3 \cdot 2^{-n} + 4$.

a) Ali zaporedje narašča ali pada? Dokaži.
b) Ali je zaporedje omejeno? Dokaži.
c) Koliko členov leži izven ε-okolice limite, če je $\varepsilon = \frac{1}{1000}$?

11. Splošni člen zaporedja je $a_n = \left(\frac{n+3}{n+1}\right)^n$. Koliko se deseti člen razlikuje od limite?

12. Splošni člen zaporedja je $a_n = \sqrt{9n^2 - 6n + 2} - 3n$. Ali deveti člen leži v ε-okolici limite, če je $\varepsilon = 10^{-2}$?

13. Kateremu številu se približuje količnik med vsoto kvadratov dveh zaporednih lihih naravnih števil in kvadratom sodega števila med njima, ko večamo števila čez vse meje?

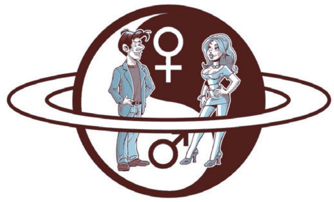
14.* Na Planet X so naselili 1000 žensk in 800 moških. Od tedaj se je vsako leto število prebivalcev ženskega spola povečalo za 20, moškega spola pa za 25. Tako je prvo leto na Planetu X živelo 1000 žensk in 800 moških, drugo leto 1020 ženskih in 825 moških prebivalcev ...

a) Zapiši predpis za število žensk na Planetu X v odvisnosti od števila let.

b) Zapiši predpis za število moških na Planetu X v odvisnosti od števila let.

c) Katerega leta je število moških preseglo število žensk?

č) Kateremu številu bi se čez več let približevalo razmerje med številom žensk in številom moških?



15.* Borut je nabavil 40 prašičev in 10 kokoši. Vsako naslednje leto je število prašičev povečal za 2, število kokoši pa za 5. Tako je imel prvo leto 40 prašičev in 10 kokoši, drugo leto 42 prašičev in 15 kokoši ...

a) Zapiši predpis za število prašičev v odvisnosti od števila let.

b) Zapiši predpis za število kokoši v odvisnosti od števila let.

c) Katero zaporedno leto je bilo število nog vseh kokoši enako številu nog vseh prašičev?

č) Kateremu številu bi se čez več let približevalo razmerje med številom nog vseh prašičev in številom nog vseh kokoši?

5. ARITMETIČNO ZAPOREDJE

Zaporedje je aritmetično, če je razlika med sosednjima členoma a_{n+1} in a_n stalna. To razliko (diferenco) označimo d:

- $a_2 - a_1 = a_3 - a_2 = \ldots = a_{n+1} - a_n = d$

Splošni člen:

- $a_n = a_1 + (n-1)d$

Vsota n členov:

- $S_n = \frac{n}{2}(2a_1 + (n-1)\,d)$ ali $S_n = \frac{n}{2}(a_1 + a_n)$

Aritmetična sredina števil a in b:

- $\frac{a+b}{2}$

1. Katera števila moraš zapisati namesto okvirčkov, tako da dobiš aritmetično zaporedje?

a) $55, 64, \square, \square, \square$ b) $78, 54, \square, \square, \square$ c) $31, \square, 41, \square, \square$

č) $45, \square, 29, \square, \square$ d) $\square, 65, 78, \square, \square$ e) $\square, 69, \square, \square, \square, 33$

2. Dano je aritmetično zaporedje $5, 8, 11, 14, \ldots$ Določi:

a) prvi člen b) diferenco c) peti člen č) splošni člen d) stoti člen

3. Dano je aritmetično zaporedje $5, 1, -3, \ldots$ Določi:

a) prvi člen b) diferenco c) četrti člen č) splošni člen d) $75.$ člen

4. Prvi člen aritmetičnega zaporedja je 12, razlika pa 4. Zapiši:

a) prvih pet členov b) splošni člen c) $85.$ člen

5. Prvi člen aritmetičnega zaporedja je 25, razlika pa -8. Zapiši:

a) prvih pet členov b) splošni člen c) $1000.$ člen

6. Prvi člen aritmetičnega zaporedja je 8, dvajseti pa 122. Določi splošni člen.

7. Drugi člen aritmetičnega zaporedja je 12, zmnožek tretjega in sedmega člena pa 91. Izračunaj petdeseti člen. Zapiši obe možnosti.

8. Vsota prvih treh členov aritmetičnega zaporedja je enaka 150, vsota četrtega in petega člena pa 50. Koliko členov tega zaporedja je pozitivnih?

9. Vsota prvih treh členov aritmetičnega zaporedja je $\frac{15}{2}$, vsota njihovih recipročnih vrednosti pa $\frac{37}{30}$. Poišči te tri člene.

10. Poišči aritmetično zaporedje, ki ustreza pogojema: $(a_7 - 1)\cdot a_3 = 30$, $a_5 + a_8 = 20$.

11. Vsota tretjega in četrtega člena aritmetičnega zaporedja je enaka 20, deveti člen je enak trikratniku drugega člena. Določi prvi člen in razliko zaporedja.

12. Četrti člen aritmetičnega zaporedja je za 6 večji od drugega člena, vsota tretjega in petega člena tega zaporedja je 20. Zapiši prvi člen in razliko tega zaporedja.

13. Štiri cela števila, katerih vsota je 22, oblikujejo aritmetično zaporedje. Vsota kvadratov prvega in tretjega števila je 50. Katera so ta števila?

14. Pet števil oblikuje aritmetično zaporedje. Vsota kvadratov števil na lihih mestih je 107, vsota kvadratov števil na sodih mestih pa 58. Katera so ta števila?

15. Štiri racionalna števila oblikujejo aritmetično zaporedje. Vsota teh števil je 20, zmnožek pa 384. Katera so ta števila? Ali obstaja še kakšna rešitev, če ne postavimo pogoja, da so števila racionalna?

16. Dano je aritmetično zaporedje $53, 45, \ldots$

a) Določi splošni člen.
b) Izračunaj 88. člen.
c) Ali je -333 člen danega zaporedja?
č) Koliko členov je večjih od 200?

17. Določi tako realno število x, da bo zaporedje aritmetično.

a) $2x + 5,\ 3x^2 + x,\ 3x - 5$
b) $\frac{1}{x-1},\ \frac{2}{x+4},\ \frac{4}{x^2+3x-4}$
c) $\sqrt{x+3},\ x+2,\ 3x+1$
č) $\log_2(x-2), \log_2(x+6), 5$
d) $3^{x-2} + 1, 4, 3^{x-1} + 3$
e) $4,\ \cos\left(x - \frac{\pi}{3}\right),\ -3$

18. Določi taki realni števili x in y, da bo zaporedje $2x + y,\ x - 4,\ 2y - 2x,\ y - 7$ aritmetično.

19. Med števili 42 in 64 vrini 7 števil tako, da nastane končno naraščajoče aritmetično zaporedje s prvim členom 42 in zadnjim členom 64. Določi srednji člen tega zaporedja.

20. Med števili 3 in -7 vrini 28 števil, tako da nastane končno padajoče aritmetično zaporedje s prvim členom 3 in zadnjim členom -7. Določi deseti člen.

21. Koliko naravnih števil:

a) je med 256 in 6893,
b) med 3629 in 7848 je sodih,
c) med 5673 in 6380 je lihih,
č) med 4793 in 7327 je deljivih s 7,
d) med 3779 in 8409 da pri deljenju z 8 ostanek 6?

22. Koliko naravnih števil med 3873 in 9999 je deljivih s 5 ali s 6?

23. Koliko je trimestnih naravnih števil, ki niso deljiva ne s 4 in ne s 7?

24. Dokaži, da je zaporedje s splošnim členom $a_n = 55 - 12n$ aritmetično.

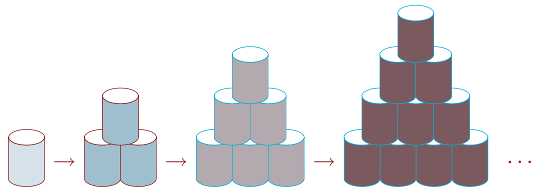
25. Dokaži: Zaporedje $a - b,\ b - c,\ c - a$ je aritmetično natanko tedaj, ko je $b = c$.

26. Izračunaj vsoto:

a) prvih desetih členov aritmetičnega zaporedja $8, 11, \ldots$
b) prvih petdesetih členov aritmetičnega zaporedja $50, 46, \ldots$
c) prvih stotih členov aritmetičnega zaporedja $-43, -37, \ldots$

27. Izračunaj vsoto prvih stotih naravnih lihih števil.

28. Iz pločevink sestavljamo strukture, kot prikazuje slika. Koliko pločevink porabimo za strukturo, ki ima v srednji vrstici 100 pločevink?



29. Izračunaj vsoto vseh naravnih števil med 388 in 3939, ki dajo pri deljenju s 15 ostanek 5.

30. Drugi člen aritmetičnga zaporedja je 639, peti pa 378. Izračunaj vsoto prvih 99 členov.

31. Izračunaj $67 + 71 + 75 + \ldots + 403$.

32. Reši enačbo $15 + 18 + 21 + \ldots + x = 7854$.

33. Prvi člen aritmetičnega zaporedja je 26, drugi člen pa 79. Izračunaj $a_{25} + a_{26} + \ldots + a_{70}$.

34. Koliko začetnih členov aritmetičnega zaporedja $188, 156, \ldots$ moramo sešteti, da dobimo $-79\,156$?

35. Najmanj koliko začetnih členov aritmetičnega zaporedja $30, 45, \ldots$ moramo sešteti, da je vsota večja od $10\,000$?

36. Zapiši vsoto prvih 20 členov aritmetičnega zaporedja in 180. člen tega zaporedja, če velja $a_2 \cdot a_7 = 100$ in $a_4 + a_5 = 25$.

37. Vsota vseh členov končnega aritmetičnega zaporedja je 2856, peti člen je enak 88, vsota zadnjih dveh členov je 424. Kolikšen je srednji člen tega zaporedja?

38. Vsota prvih 34 členov neskončnega aritmetičnega zaporedja je za 66 manjša od vsote prvih 32 členov tega zaporedja. Devetnajsti člen je za 36 manjši od petnajstega člena. Ali je $-259{,}5$ člen tega zaporedja?

39. Vsota prvih treh členov naraščajočega aritmetičnega zaporedja je 21, vsota njihovih kvadratov pa 155. Izračunaj kub vsote prvih štirih členov tega zaporedja.

40. Med števili 36 in 506 vrinemo nekaj števil tako, da nastane končno aritmetično zaporedje s prvim členom 36 in zadnjim členom 506. Vsota vseh členov nastalega zaporedja je $13\,008$. Koliko števil smo vrinili?

41. Med števili -44 in 52 vrinemo nekaj števil tako, da nastane končno aritmetično zaporedje s prvim členom -44 in zadnjim členom 52. Vsota vrinjenih števil je 44. Koliko števil smo vrinili?

42. Zaporedje ima 48 členov, katerih vsota je 2496. Za člene velja zveza $a_{n+1} = a_n + 2$. Izračunaj vsoto vseh členov zaporedja, ki imajo sode indekse.

43. Naj bo S_n vsota prvih 10 večkratnikov števila n.
Tako je na primer $S_2 = 2 + 4 + 6 + 8 + 10 + 12 + 14 + 16 + 18 + 20$.
Koliko je $S_1 + S_2 + S_3 + \ldots + S_{10}$?

44. Določi splošni člen zaporedja, katerega vsota n členov je enaka $S_n = 5n^2 - n$.

45. Rešitvi enačb $2^{x+3} + 5 \cdot 2^{x+1} - 144 = 0$ in $\log_2(x+3) - \log_2(2x-1) - 2 = 0$ sta prva člena padajočega aritmetičnega zaporedja.

a) Koliko členov zaporedja je večjih od -678?

b) Najmanj koliko začetnih členov zaporedja moramo sešteti, da bo vsota manjša od -678?

c) Izračunaj $a_{12} + a_{13} + \ldots + a_{27}$.

46. Realni rešitvi enačbe $x^4 - 2x^3 - 2x^2 - 2x = 3$ sta prva člena končnega naraščajočega aritmetičnega zaporedja, ki ima 30 členov.

a) Izračunaj $\sum_{n=5}^{25} a_n$.

b) Izračunaj vsoto vseh členov s sodimi indeksi.

c) Ali je 119 člen tega zaporedja?

47. Koliko števil med 1 in 10^{50} ima vsoto števk enako 2?

48. Leta 2008 je Žiga Keš začel varčevati. Prvi dan v letu je v velik hranilnik spustil 1 cent, drugi dan 2 centa, tretji dan 3 ...

a) Koliko denarja je Žiga vrgel v hranilnik 14. julija?

b) Na kateri datum je vsota v hranilniku presegla 100 €?

c) Koliko je tehtala vsebina njegovega hranilnika ob koncu leta, če je vanj metal le kovance za 1 cent? Kovanec za 1 cent tehta $2{,}30$ g.

49. Leta 2010 se je babica Greta Biceps odločila, da bo športno aktivna. Naredila je načrt:

- Prvega januarja bom naredila dva počepa, 2. januarja štiri, 3. šest in tako vsak dan dva počepa več.
- Prvega januarja bom naredila eno skleco, 2. dve, 3. tri in tako vsak dan eno skleco več.

a) Koliko počepov in koliko sklec bi morala babica Greta narediti 15. maja?

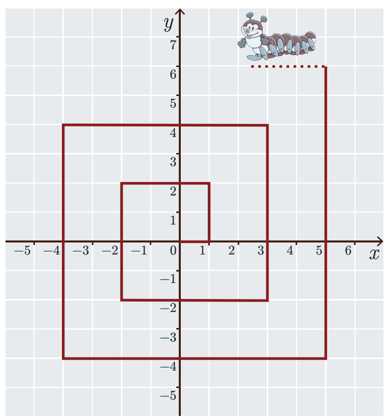
b) Koliko počepov bi naredila babica Greta do vključno 31. decembra istega leta?

c) Koliko časa bi babica Greta v letu 2010 porabila za ti dve športni aktivnosti, če je za eno skleco potrebovala 10 s, za počep pa 5 s? Rezultat zapiši v dnevih.

č) Babica Greta je odstopila od svojega načrta na dan, ko je čas vadbe presegel dolžino tričetrturne španske telenovele. Kdaj je zadnjič telovadila?

50. V vrsti stoji 13 ljudi, urejenih od najmanjšega do največjega. Vsak naslednji je višji od osebe pred seboj za dolžino nohta na palcu leve noge prve osebe v vrsti. Skupna višina vseh je $22{,}62$ m, skupna masa pa 999 kg. Koliko je visok človek na sredini vrste?

51. Marta se odpravlja na pohod. V koordinatnem izhodišču je z glavo obrnjeno proti točki $(1, 0)$. Začne pohod. Prehodi eno enoto, se obrne za $90°$ v levo, gre še dve enoti naprej, se obrne za $90°$ v levo, nadaljuje tri enote naprej ...



a) Ali gre skozi točko $A(1000, 500)$?

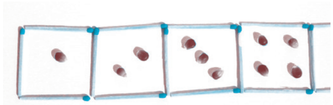
b) Ali gre skozi točko $B(7883, 6666)$?

c) Ali se obrača v točki $C(-7373, 7374)$?

č) Kolikšno pot naredi Marta med 50. in 51. obratom?

d) Kolikšno pot naredi Marta od izhodišča do točke $M(2001, -2000)$?

52. Z vžigalicami oblikujemo kvadrate. Vanje polagamo koruzna zrna, v vsak kvadrat eno zrno več.



a) Koliko vžigalic in koliko zrn koruze porabimo za deseti kvadrat?

b) Koliko vžigalic in koliko zrn koruze potrebujemo za n-ti kvadrat?

c) Koliko vžigalic in koliko zrn koruze porabimo za začetnih 10 kvadratov?

č) Koliko vžigalic in koliko zrn koruze porabimo za začetnih n-kvadratov?

d) Najmanj koliko kvadratov moramo oblikovati, da skupno število koruznih zrn preseže skupno število vžigalic?

53.* Opazujemo tri zobata kolesa, ki se stikajo. Ko največje kolo naredi 3 obrate, drugi dve kolesi skupaj naredita 10 obratov. Polmeri teh zobatih koles oblikujejo aritmetično zaporedje, vsota dolžin polmerov največjega in najmanjšega kolesa je enaka 12 cm. Izračunaj dolžine vseh treh polmerov.

54. Stranica b trikotnika ABC je dolga 8 dm, ploščina je enaka $4\sqrt{21}$ dm^2, za kote pa velja $\gamma < \beta < \alpha$. Izračunaj dolžini stranic a in c, če dolžine stranic oblikujejo aritmetično zaporedje.

55.* Dolžine stranic trikotnika oblikujejo aritmetično zaporedje z razliko 1 cm. Koliko so dolge stranice, če je

a) ploščina trikotnika enaka 84 cm^2,

b) polmer trikotniku včrtane krožnice dolg $\sqrt{5}$ cm,

c) polmer trikotniku očrtane krožnice dolg $2{,}5$ cm.

56. Velikosti notranjih kotov trikotnika ABC, merjene v stopinjah, oblikujejo aritmetično zaporedje. Določi razliko tega zaporedja, če je $\sin\alpha + \sin\beta + \sin\gamma = \frac{3+\sqrt{3}}{2}$.

57.* V kvadrat s stranico dolžine a včrtamo enakokraki ostrokotni trikotnik, ki ima vrh v enem izmed oglišč kvadrata in ploščino S_2. Kvadrat je tako razdeljen na še dva pravokotna trikotnika, katerih ena kateta je dolga a, ploščina pa S_1, in na enakokraki pravokotni trikotnik, katerega kateti sta dolgi x $(x < a)$, ploščina pa S_3. Izrazi dolžino x s parametrom a, če veš, da S_1, S_2 in S_3 oblikujejo aritmetično zaporedje.

58. Dolžina daljše osnovnice, višina in dolžina krajše osnovnice enakokrakega trapeza, katerega krak je dolg 5 cm, oblikujejo aritmetično zaporedje. Razlika ploščin kvadratov nad osnovnicama trapeza je enaka 48 cm^2. Koliko sta dolgi osnovnici trapeza?

59. Obseg pravokotnega trapeza $ABCD$ s pravim kotom pri A je enak 36 cm. Dolžina višine trapeza je enaka $\frac{2}{3}$ dolžine daljše osnovnice. Krajša osnovnica, višina in daljši krak trapeza oblikujejo aritmetično zaporedje. Kolikšna je ploščina trapeza $ABCD$?

60. Urška je prvo leto službe prejemala mesečno plačo v višini 1350 €. V začetku vsakega naslednjega leta se ji je plača povišala za $37{,}50$ €, in sicer do vključno petega leta službe. V začetku šestega leta in tudi vsakega nadaljnjega leta službe se ji je mesečna plača povišala za $56{,}25$ €, vse do tedaj, ko je dosegla višino 1950 €.

a) Kolikšno plačo je prejemala v petem letu službe?

b) Kolikšno plačo je prejemala v šestem letu službe?

c) Katero leto službe je dosegla plačo 1950 €?

61. Pravimo, da je zaporedje realnih števil harmonično, če je zaporedje recipročnih vrednosti teh števil aritmetično.

a) Zapiši nekaj harmoničnih zaporedij.

b) Pokaži: če so a^2, b^2 in c^2 zaporedni členi aritmetičnega zaporedja, so $a + b$, $a + c$ in $b + c$ zaporedni členi harmoničnega zaporedja.

6. GEOMETRIJSKO ZAPOREDJE

Zaporedje je geometrijsko, če je količnik med sosednjima členoma a_{n+1} in a_n stalen.
Ta količnik (kvocient) označimo q:

- $\dfrac{a_2}{a_1} = \dfrac{a_3}{a_2} = \dfrac{a_4}{a_3} = \ldots = \dfrac{a_{n+1}}{a_n} = q$

Splošni člen:

- $a_n = a_1 \cdot q^{n-1}$

Vsota n členov:

- $S_n = \dfrac{a_1 \cdot (q^n - 1)}{q - 1}$; $q \neq 1$

Geometrijska sredina števil a in b:

- $\sqrt{a \cdot b}$

1. Dano je geometrijsko zaporedje $2, 10, 50, 250, \ldots$ Določi:
   a) prvi člen b) količnik c) peti člen č) splošni člen d) stoti člen

2. Dano je geometrijsko zaporedje $40, 20, 10, \ldots$ Določi:
   a) prvi člen b) količnik c) četrti člen č) splošni člen d) $75.$ člen

3. Dano je geometrijsko zaporedje s prvim členom 12 in količnikom 4. Zapiši:
   a) prve štiri člene b) splošni člen c) $85.$ člen

4. Dano je geometrijsko zaporedje s prvim členom 25 in količnikom $0{,}2$. Zapiši:
   a) prvih pet členov b) splošni člen c) $1000.$ člen

5. Dano je geometrijsko zaporedje $14, 7, \ldots$
   a) Določi splošni člen. b) Izračunaj $88.$ člen.
   c) Ali je $\frac{7}{512}$ člen danega zaporedja? č) Koliko členov je večjih od $0{,}0001$?

6. Prvi člen naraščajočega geometrijskega zaporedja je enak 2, peti pa 50. Izračunaj sedmi člen.

7. Prvi člen alternirajočega geometrijskega zaporedja je enak 30, tretji pa $3{,}\overline{3}$. Zapiši splošni člen.

8. Drugi člen geometrijskega zaporedja je za $\frac{4}{3}$ večji od prvega in za 4 manjši od tretjega člena. Izračunaj četrti člen.

9. Drugi člen geometrijskega zaporedja je enak $\frac{3}{5}$, peti pa 75. Zapiši splošni člen.

10. Vsota prvega in drugega člena padajočega geometrijskega zaporedja je 20, tretjega in četrtega pa 5. Zapiši splošni člen.

11. Zapiši prvi člen in količnik geometrijskega zaporedja, za katerega velja: $a_5 \cdot a_3 = 4$, $a_6 + a_4 = \frac{5}{a_2}$.

12. Četrti člen geometrijskega zaporedja je 4, zmnožek tretjega in šestega člena pa 32. Zapiši prvi člen in količnik zaporedja.

13. Med števili 6 in 192 vrini štiri števila, tako da nastane šestčleno naraščajoče geometrijsko zaporedje. Zapiši zaporedje.

14. Med števili 1620 in 20 vrini tri števila, tako da nastane petčleno alternirajoče geometrijsko zaporedje. Zapiši zaporedje.

15. Določi tako realno število x, da bo zaporedje geometrijsko.

a) $x-1,\ 2-x,\ x-4$

b) $x^2,\ x+4,\ 2x-4$

c) $3^{x+1}-3\sqrt{5},\ 3^{x+1}-3,\ 3^{x+1}+3\sqrt{5}$

č) $4\cdot 3^{x-2},\ 2\cdot 3^{2x+4},\ 3^{2x+9}$

d) $\sqrt{3}\sin x,\ \ \sin x,\ \ \cos x$

e) $\log_8(x+1)+1,\ \log_8(x+1),\ \log_8(x+1)+2$

16.* Za katere vrednosti parametrov a in b je zaporedje $9,\ a-b,\ 4,\ a+b$ geometrijsko?

17. Določi a tako, da bodo rešitve enačbe $3x^3-13x^2+13x+a=0$ oblikovale geometrijsko zaporedje. Rešitve enačbe zapiši.

18. Izračunaj vsoto:

a) prvih desetih členov geometrijskega zaporedja $2, 4, 8, \ldots$

b) prvih devetih členov geometrijskega zaporedja $\frac{1}{9},\ \frac{1}{3},\ 1,\ \ldots$

19. Izračunaj.

a) $\displaystyle\sum_{n=1}^{11} 3\cdot 2^{n-1}$

b) $\displaystyle\sum_{n=1}^{9} 5^{n-2}$

20. Izračunaj vsoto prvih devetih členov geometrijskega zaporedja, katerega drugi člen je enak $3\sqrt{5}$, tretji pa 15.

21. Izračunaj vsoto prvih osmih členov alternirajočega geometrijskega zaporedja, katerega drugi člen je enak -20, četrti pa -45.

22. Izračunaj vsoto členov končnega geometrijskega zaporedja $3,\ 3\sqrt{2},\ 6,\ 6\sqrt{2},\ \ \ldots,\ 3072$ na dve decimalni mesti natančno.

23. Vsota prvih petih členov geometrijskega zaporedja s količnikom $-\frac{1}{3}$ je 915. Izračunaj šesti člen.

24. Koliko začetnih členov geometrijskega zaporedja $2, 3, \ \ldots$ moramo sešteti, da dobimo več kot 10^5?

25. Kolikšen je količnik geometrijskega zaporedja, katerega razlika med prvim in sedmim členom je enaka $14\,175$, vsota začetnih šestih členov pa $28\,350$?

26. Vsota prvih osmih členov geometrijskega zaporedja je $195\,312$. Zapiši tretji člen, če je dvajseti člen enak stopetindvajsetini triindvajsetega člena.

27. Tretji člen zaporedja, za katerega velja rekurzivna formula $a_n=\frac{1}{3}a_{n-1}$, je enak -6.

a) Zapiši prvih šest členov zaporedja.

b) Preveri, ali je zaporedje geometrijsko.

c) Izračunaj vsoto prvih desetih členov zaporedja.

č) Izrazi a_n kot funkcijo n.

d) Izračunaj $\lim\limits_{n\to\infty} a_n$.

28. Tina je za rojstni dan dobila 100 €. Prvi dan ni porabila nič denarja, vsak naslednji dan pa je porabila $\frac{1}{10}$ denarja, ki ji je ostal od prejšnjega dne. Koliko denarja je še imela, ko je 12. dan po rojstnem dnevu že porabila predvideni znesek denarja?

29. Na kateti CB enakokrakega pravokotnega trikotnika ABC s pravim kotom pri C izberemo točki X in Y, da je $|CX| < |CY|$ in da dolžine $|AC|$, $|AX|$, $|AY|$ in $|AB|$ oblikujejo geometrijsko zaporedje. Izračunaj dolžini $|CX|$ in $|CY|$, če je dolžina katete trikotnika ABC enaka 1.

30. V enakokraki trikotnik, katerega osnovnica je dolga 2 cm, včrtamo kvadrat, katerega ena stranica leži na osnovnici trikotnika. Dolžina stranice včrtanega kvadrata, dolžina osnovnice trikotnika in višina trikotnika oblikujejo geometrijsko zaporedje. Kolikšni sta višina trikotnika in dolžina stranice včrtanega kvadrata?

31. Preveri, ali dolžina višine, kraka in premera očrtane krožnice enakokrakega trikotnika oblikujejo geometrijsko zaporedje.

32. Izračunaj velikost ostrega kota romba, katerega dolžina stranice je enaka geometrijski sredini dolžin diagonal.

33. Diagonala enakokrakega trapeza, katerega obseg je enak $4 + 2\sqrt{3}$, je pravokotna na krak. Koliko sta dolgi osnovnici trapeza, če dolžine krajše osnovnice, kraka in daljše osnovnice oblikujejo geometrijsko zaporedje?

34. Določi tako realno število x, da bo zaporedje $x - 1,\ 2x - 5,\ 4x - 15$:

a) naraščajoče b) aritmetično c) geometrijsko

35. Izračunaj vsoto prvih desetih členov zaporedja $6, 8, \ldots$, če je to zaporedje:

a) aritmetično b) geometrijsko

36. Obseg trikotnika je 95 cm, najkrajša stranica pa je dolga 20 cm. Določi dolžini drugih dveh stranic, če dolžine stranic tvorijo:

a) aritmetično zaporedje b) geometrijsko zaporedje

37. Obseg pravokotnega trikotnika je 36 cm. Izračunaj dolžine njegovih stranic, če tvorijo:

a) aritmetično zaporedje b) geometrijsko zaporedje

38. Prvi člen naraščajočega tričlenega aritmetičnega zaporedja z vsoto 21 povečamo za 1, drugega zmanjšamo za 1, tretjega pa ohranimo. Tako dobimo geometrijsko zaporedje. Določi obe zaporedji.

39. Drugi člen naraščajočega tričlenega geometrijskega zaporedja z vsoto 26 povečamo za 4, prvi in tretji člen pa ohranimo. Tako dobimo aritmetično zaporedje. Določi obe zaporedji.

40. Razlika tričlenega aritmetičnega zaporedja je enaka -3. Če ohranimo prva dva člena, tretjega pa povečamo za 1, dobimo geometrijsko zaporedje. Določi obe zaporedji.

41. Srednji člen padajočega tričlenega geometrijskega zaporedja je enak 5. Če ohranimo prvi in tretji člen, srednjega pa povečamo za 8, dobimo aritmetično zaporedje. Določi obe zaporedji.

42. Vsota prvih treh členov geometrijskega zaporedja je 14. Če prva dva člena ohranimo, od tretjega pa odštejemo prvi člen, dobimo aritmetično zaporedje. Koliko je vsota prvih desetih členov geometrijskega zaporedja?

43. Tri števila z vsoto 9 oblikujejo aritmetično zaporedje. Če prvi dve števili ohranimo, tretjemu pa prištejemo prvi dve števili, nastane geometrijsko zaporedje. Zapiši ta števila.

44. Tri števila z vsoto 26 so prvi trije členi geometrijskega zaporedja. Če tem številom po vrsti prištejemo 1, 6 in 3, dobimo aritmetično zaporedje. Zapiši ta tri števila.

45. Količnik med četrtim in prvim členom geometrijskega zaporedja je 8. Če prva dva člena ohranimo, tretjega pa zmanjšamo za 3, dobimo tričleno aritmetično zaporedje. Zapiši prve tri člene obeh zaporedij.

46. Vsota treh števil, ki oblikujejo geometrijsko zaporedje, je 21. Ta tri števila so hkrati prvi, drugi in šesti člen aritmetičnega zaporedja. Zapiši ta števila.

47. Četrti člen aritmetičnega zaporedja je za 10 večji od drugega. Drugi, šesti in dvajseti člen tvorijo tričleno geometrijsko zaporedje. Zapiši prvi člen in razliko aritmetičnega zaporedja ter prvi člen in količnik geometrijskega zaporedja.

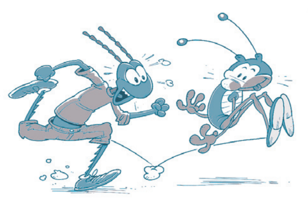
48. Vsota prvih osmih členov aritmetičnega zaporedja je enaka 120. Prvi, drugi in sedmi člen oblikujejo geometrijsko zaporedje. Zapiši splošni člen aritmetičnega zaporedja.

49. V majhni vasici živi 97 prebivalcev, ki so med seboj dobro povezani. Vsakdo ima telefonsko številko vsakega vaščana. Nekega dne tri vaščanke presenetijo sovaščana in sovaščanko v objemu. Nemudoma vsaka seže po svojem mobilnem telefonu in v eni minuti sporoči novico sovaščanu, ki še ni seznanjen z dogodkom. V drugi minuti očividke in osebe, katerim so bile sporočene novice, posredujejo novico naprej eni osebi, ki še ni seznanjena z dogodkom. Po enakem postopku nadaljujejo z obveščanjem.

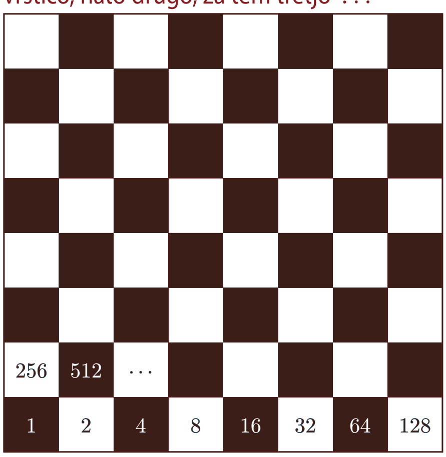
a) V kolikšnem času izve novico vsa vas?

b) Oceni, v kolikšnem času bi bila obveščena vsa Slovenija ob podobni predpostavki.

50. Bolha in kobilica tekmujeta, katera bo prva premagala razdaljo 80 m.
Prvi bolhin skok je dolg 80 cm in traja $0{,}8$ s. Vsak naslednji skok je enako dolg kot prvi, vendar traja $2\ \%$ dlje kot skok pred njim.
Prvi kobiličin skok je dolg $2{,}02$ m in traja $1{,}5$ s. Tudi vsak naslednji skok traja enako, vendar je za $2\ \%$ krajši kot skok pred njim.
Katera izmed njiju bo prva prečkala ciljno črto?



51. Na šahovnico zapišemo potence števila dve, kot prikazuje slika. Od leve proti desni najprej zapolnimo prvo vrstico, nato drugo, za tem tretjo ...



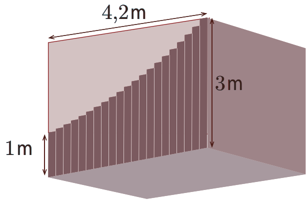
a) Katero število je v petem stolpcu sedme vrstice?

b) Izračunaj vsoto števil na celotni šahovnici.

c) Izračunaj vsoto števil na črnih poljih.

č) Izračunaj vsoto števil, ki ležijo v petem stolpcu.

52.* Aleš bo preuredil sobo v kleti hiše. Na eno izmed sten bo pritrdil deske tako, da bodo postavljene navpično oblikovale stolpce, ki se bodo stikali. Stena je velika $4{,}2$ m $\times$ 3 m, deske pa so široke 28 cm. Aleš želi, da je na levem koncu stene najkrajša deska, dolga 1 m, na desnem koncu sobe pa najdaljša deska, dolga 3 m, ter da dolžine desk oblikujejo geometrijsko zaporedje.



a) Koliko metrov desk potrebuje Aleš?

b) Za koliko odstotkov je poljubna deska višja od deske pred njo?

c) Najmanj koliko desk, dolgih 4 m, mora kupiti, če mora biti vsak stolp iz ene, ustrezno dolge deske?

53. Rešitev enačbe $\sqrt{x+10}-x=4$ je prvi člen, rešitev enačbe $\frac{1}{x+3}-\frac{2}{x-1}=\frac{11}{x^2+2x-3}$ pa drugi člen geometrijskega zaporedja s splošnim členom a_n.

a) Od vključno katerega člena naprej so členi zaporedja po absolutni vrednosti večji od $1\,000\,000$?

b) Koliko začetnih členov tega zaporedja moramo sešteti, da dobimo 343?

c) Izračunaj $\sum\limits_{k=5}^{16} a_k$.

54. Rešitvi enačb $8^{x-8}\cdot\sqrt[10]{2^{x-3}}\cdot 0,125^x=1$ in $\log_3\left(\log_6(x+4)+7\right)-2=0$ sta prvi in zadnji člen končnega naraščajočega geometrijskega zaporedja, ki ima šest členov.

a) Izračunaj vsoto vseh členov zaporedja.

b) Izračunaj aritmetično sredino osrednjih dveh členov zaporedja.

c) Med vsaka sosednja člena danega zaporedja vrini število, tako da nastane novo geometrijsko zaporedje z enajstimi členi. Izračunaj količnik novonastalega zaporedja.

55. Za zaporedje s splošnim členom a_n velja $a_1=t;\ t\in\mathbb{R}$ in $a_{n+1}=2a_n$.

a) Zapiši predpis za splošni člen a_n v odvisnosti od parametra t.

b) Za katero vrednost parametra t je zaporedje konstantno?

c) Za katere vrednosti parametra t je zaporedje strogo padajoče?

č) Za katere vrednosti parametra t je zaporedje navzgor omejeno?

d) Določi parameter t tako, da bo osmi člen za 1 manjši od sedmega.

e) Poišči realne rešitve enačbe $\sum\limits_{n=1}^{5}\log_2 a_n=5$.

7. GEOMETRIJSKA VRSTA

Neskončna vrsta je vsota členov neskončnega zaporedja.

Neskončno zaporedje: $a_1,\ a_2,\ a_3,\ a_4, \ldots$

Neskončna vrsta: $a_1 + a_2 + a_3 + a_4 + \ldots$

Vsota začetnih n členov je n-ta delna vsota neskončne vrste in jo označimo S_n.

$S_1 = a_1$

$S_2 = a_1 + a_2$

$S_3 = a_1 + a_2 + a_3$

$\ldots$

$S_n = a_1 + a_2 + a_3 + \ldots + a_n$

Če je zaporedje delnih vsot $S_1,\ S_2,\ S_3,\ \ldots$ konvergentno in ima limito S, je tudi vrsta $a_1 + a_2 + a_3 + \ldots$ konvergentna in njena vsota je enaka S.

Geometrijska vrsta je vsota členov neskončnega geometrijskega zaporedja.

Neskončno geometrijsko zaporedje: $a_1,\ a_1q,\ a_1q^2,\ a_1q^3,\ \ldots$

Geometrijska vrsta: $a_1 + a_1q + a_1q^2 + a_1q^3 + \ldots$

Geometrijska vrsta:

- je konvergentna, če je $|q| < 1$. Tedaj je njena vsota enaka $S = \dfrac{a_1}{1-q}$,
- je divergentna, če je $|q| \geq 1$. Tedaj ne moremo izračunati njene vsote.

1. Izračunaj vsoto geometrijske vrste, če obstaja.

a) $1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \ldots$ b) $1 + 2 + 4 + \ldots$ c) $9 + 3 + 1 + \ldots$ č) $\frac{2}{3} + 1 + \frac{3}{2} + \ldots$

2. Izračunaj vsoto, če obstaja.

a) $\sum\limits_{k=1}^{\infty} \left(\frac{2}{3}\right)^k$ b) $\sum\limits_{k=1}^{\infty} \left(\frac{3}{2}\right)^k$ c) $\sum\limits_{k=3}^{\infty} \frac{2^k}{3}$ č) $\sum\limits_{k=3}^{\infty} \frac{2}{3^k}$

3. Dano je neskončno geometrijsko zaporedje $3, 2, \ldots$ Za koliko odstotkov se vsota prvih desetih členov zaporedja razlikuje od vsote pripadajoče geometrijske vrste?

4. Izračunaj.

a) $\sqrt{2 \cdot \sqrt{2 \cdot \sqrt{2 \cdot \ldots}}}$ b) $5 \cdot \sqrt[3]{5 \cdot \sqrt[3]{5 \cdot \sqrt[3]{5 \cdot \ldots}}}$

5. Periodično decimalno število zapiši z ulomkom. Nalogo reši na dva načina.

a) $0{,}\overline{3}$ b) $1{,}2\overline{6}$ c) $2{,}1\overline{25}$

6. Reši enačbo.

a) $\log_3 x + \log_3 \sqrt{x} + \log_3 \sqrt[4]{x} + \log_3 \sqrt[8]{x} + \ldots = 4$

b) $\log_3 x^{0,2} + \log_3 x^{0,02} + \log_3 x^{0,002} + \ldots = -\frac{1}{3}$

7. Izračunaj vsoto geometrijske vrste, ki pripada neskončnemu alternirajočemu geometrijskemu zaporedju, katerega tretji člen je enak 10, peti člen pa 5. Rezultat naj bo točen.

8. Prvi seštevanec geometrijske vrste je enak $\frac{7}{4}$, vsota pa 7. Izračunaj količnik pripadajočega zaporedja.

9. Izračunaj količnik neskončnega geometrijskega zaporedja, drugi člen je enak -2, če je vsota pripadajoče geometrijske vrste enaka $-\frac{25}{2}$. Zapiši vse možnosti.

10. Izračunaj vsoto neskončne geometrijske vrste s količnikom $\frac{1}{2}$, če je drugi člen enak 3.

11. Za katere x je geometrijska vrsta konvergentna?

a) $1 + x + x^2 + x^3 + \ldots$ b) $4 + 8x + 16x^2 + \ldots$ c) $2 + \frac{2}{x} + \frac{2}{x^2} + \ldots$

12. Reši enačbo.

a) $1 + x + x^2 + x^3 + \ldots = \frac{6x-1}{4x-1}$

b) $2^x + 2^{x-1} + 2^{x-2} + \ldots = 8$

c) $2^x + 2^{x+1} + 2^{x+2} + \ldots + 2^{x+n-1} = 2^n(2^n - 1)$

13. Dana je neskončna geometrijska vrsta $2 + 6x + 18x^2 + \ldots$

a) Za katere x je dana vrsta konvergentna?

b) Izračunaj vsoto vrste za $x = \frac{1}{5}$.

c) Za kateri x je vsota vrste enaka $\frac{2}{3}$?

14. Dana je neskončna geometrijska vrsta $1 + (2x + 1) + (2x + 1)^2 + (2x + 1)^3 + \ldots,\ x \in \mathbb{R}$

a) Za katere x je dana vrsta konvergentna?

b) Izračunaj vsoto vrste za $x = -\frac{1}{4}$.

c) Za kateri x je vsota vrste enaka 3?

15. Dana je neskončna geometrijska vrsta $1 + \frac{1}{(x+2)} + \frac{1}{(x+2)^2} + \frac{1}{(x+2)^3} + \ldots,\ x \in \mathbb{R} - \{-2\}$

a) Za katere x je dana vrsta konvergentna?

b) Naj bo $x = 3$. Izračunaj vsoto vseh seštevancev na sodih mestih v dani vrsti.

c) Za kateri x je vsota vrste enaka $4x$?

16. Dana je neskončna geometrijska vrsta $1 + 3^x + 3^{2x} + \ldots,\ x \in \mathbb{R}$.

a) Za katere vrednosti x je dana vrsta konvergentna?

b) Izračunaj vsoto vrste za $x = \log_3 \frac{1}{8}$.

c) Izračunaj x tako, da bo dvajseti seštevanec enak $\sqrt{3}$.

č) Za kateri vrednosti x je vsota vrste enaka $\frac{81}{8} \cdot 3^x$?

17. Dano je neskončno geometrijsko zaporedje $2^x,\ 2^{x-1},\ 2^{x-2},\ \ldots,\ x \in \mathbb{R}$.

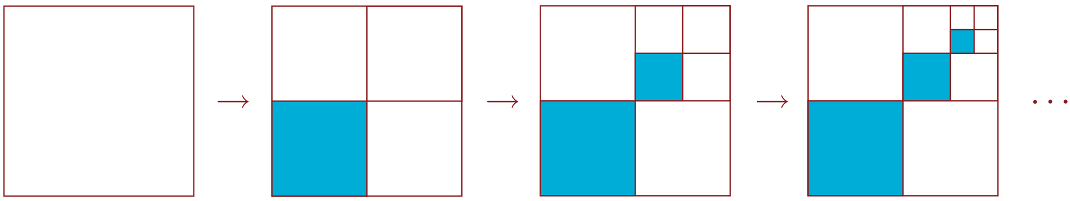
a) Zapiši pripadajočo geometrijsko vrsto.

b) Utemelji, da je pripadajoča geometrijska vrsta konvergentna za vsak $x \in \mathbb{R}$.

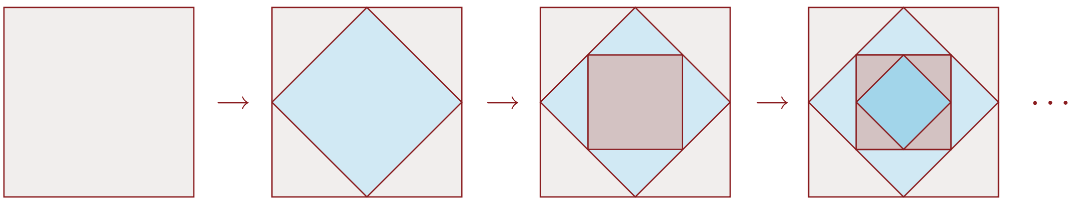
c) Izračunaj vsoto vrste za $x = \log_2 3$.

č) Za kateri x je vsota geometrijske vrste, pripadajoče le tistim členom danega zaporedja, ki imajo sode indekse, enaka $2^x - \frac{32}{3}$?

18. Kvadrat, katerega stranica je dolga 10 cm, razdelimo na štiri enake kvadrate in pobarvamo levi spodnji kvadrat. Nato zgornji desni kvadrat razdelimo na štiri enake kvadrate in pobarvamo levi spodnji kvadrat. Desni zgornji kvadrat spet razdelimo na štiri kvadrate in pobarvamo levi spodnji kvadrat ... Izračunaj vsoto ploščin in vsoto obsegov vseh pobarvanih kvadratov.



19. Dan je kvadrat s stranico, dolgo a. Oglišča drugega kvadrata so razpolovišča stranic prvega kvadrata, oglišča tretjega kvadrata so razpolovišča stranic drugega kvadrata ... Izračunaj vsoto ploščin in vsoto obsegov vseh narisanih kvadratov.



20. Krogu s polmerom, dolgim r, včrtamo kvadrat. Dobljenemu kvadratu včrtamo krog, temu spet kvadrat ... S parametrom r izrazi vsoto:

a) obsegov vseh krogov,

b) obsegov vseh kvadratov,

c) ploščin vseh krogov,

č) ploščin vseh kvadratov.

21. Enakostraničnemu trikotniku, katerega stranica je dolga a, včrtamo krog. Dobljenemu krogu včrtamo enakostranični trikotnik, temu spet krog ... S parametrom a izrazi vsoto:

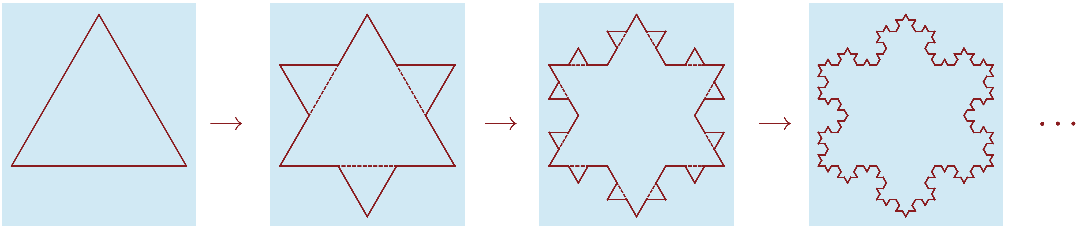
a) obsegov vseh krogov,

b) obsegov vseh trikotnikov,

c) ploščin vseh krogov,

č) ploščin vseh trikotnikov.

22.* Belo Kochovo snežinko oblikujemo tako, da na barvni papir prilepimo:
(i) enakostranični trikotnik, katerega stranica je dolga a,
(ii) na sredini vsake stranice lika, dobljenega pri (i), enakostranični trikotnik, katerega stranica je dolga $\frac{a}{3}$,
(iii) na sredini vsake stranice lika, dobljenega pri (ii), enakostranični trikotnik, katerega stranica je dolga $\frac{a}{9}$ ...
Po neskončno mnogo korakih je oblikovana Kochova snežinka.



a) Izračunaj obseg Kochove snežinke, če je mogoče.

b) Izračunaj ploščino Kochove snežinke, če je mogoče.

23. Izračunaj prvih pet delnih vsot geometrijske vrste $8 + 4 + 2 + \ldots$

24. Izračunaj prve štiri delne vsote neskončne vrste, ki pripadajo zaporedju s splošnim členom $a_n = \frac{n+2}{n}$.

25. Kolikšna je vsota neskončne vrste z delno vsoto $S_n = \frac{7n}{n+6}$?

26.* Vrsta, ki pripada neskončnemu zaporedju s splošnim členom a_n, ima delno vsoto $S_n = \frac{2n}{n+1}$.

a) Izračunaj prvih pet členov zaporedja.

b) Izračunaj splošni člen zaporedja.

c) Izračunaj $\lim\limits_{n\to\infty} a_n$.

č) Izračunaj $\lim\limits_{n\to\infty} S_n$.

d) Določi vsoto neskončne vrste, ki pripada zaporedju $\{a_n\}$.

27.* Splošni člen zaporedja je enak $a_n = \frac{1}{n(n+1)}$.

a) Izračunaj nekaj začetnih delnih vsot neskončne vrste, ki pripada zaporedju $\{a_n\}$.

b) Zapiši formulo za delno vsoto S_n vrste, ki pripada zaporedju.

c) Izračunaj vsoto vrste, ki pripada zaporedju.

8. OBRESTNO OBRESTNI RAČUN

Glavnica (kapital, depozit, vloga) je znesek, ki ga vložimo v banko.

Obresti so znesek, za katerega banka poveča vloženo glavnico.

Obrestna mera pove, koliko odstotkov znašajo obresti.

Obrestovalna doba (kapitalizacijska doba) je čas med dvema zaporednima pripisoma obresti.

Obrestno obrestovanje

Po vsakem pripisu obresti se obrestuje povečana glavnica (začetna glavnica skupaj z obrestmi).

Obrestovalni faktor je število, s katerim se pomnoži glavnica ob vsakem pripisu obresti.

Če je obrestovalna doba krajša od enega leta, uporabljamo:

- **relativno obrestovanje**
  Obrestna mera za obrestovalno dobo je relativni delež celoletne obrestne mere. Končna vrednost glavnice je pri pogostejšem pripisovanju obresti večja kot pri celoletni kapitalizaciji.
- **konformno obrestovanje**
  Obrestna mera za obrestovalno dobo je prilagojena tako, da je pri pogostejšem pripisovanju obresti po enem letu dosežena enaka končna vrednost glavnice kot pri celoletni kapitalizaciji.

Banke uporabljajo konformno obrestovanje, razen če je posebej poudarjeno, da uporabljajo relativno obrestovanje.

Navadno obrestovanje

Po vsakem pripisu obresti se obrestuje le začetna glavnica brez obresti.

Banke uporabljajo obrestno obrestovanje, razen če je posebej poudarjeno, da uporabljajo navadno obrestovanje.

	OBRESTOVALNA DOBA			
	1 leto	pol leta	1 mesec	1 dan
Glavnica	a	a	a	a
Letna obrestna mera	p	p	p	p
Čas vezave	n let	n polletij	n mesecev	n dni
Obrestovalni faktor (relativno obrestovanje)	$r=1+\frac{p}{100}$	$r=1+\frac{\frac{p}{2}}{100}$	$r=1+\frac{\frac{p}{12}}{100}$	$r=1+\frac{\frac{p}{365}}{100}$
Obrestovalni faktor (konformno obrestovanje)	$r=1+\frac{p}{100}$	$r=\sqrt{1+\frac{p}{100}}$	$r=\sqrt[12]{1+\frac{p}{100}}$	$r=\sqrt[365]{1+\frac{p}{100}}$
Vrednost glavnice (relativno in konformno obrestovanje)	$a_n=a\cdot r^n$	$a_n=a\cdot r^n$	$a_n=a\cdot r^n$	$a_n=a\cdot r^n$
Vrednost glavnice (navadno obrestovanje)	$a_n=a\cdot(1+\frac{p\cdot n}{100})$	$a_n=a\cdot\left(1+\frac{\frac{p}{2}\cdot n}{100}\right)$	$a_n=a\cdot\left(1+\frac{\frac{p}{12}\cdot n}{100}\right)$	$a_n=a\cdot\left(1+\frac{\frac{p}{365}\cdot n}{100}\right)$

1. Izdelek stane 200 €. Izračunaj končno ceno izdelka, če se:
   a) enkrat podraži za $5\ \%$
   b) dvakrat podraži za $5\ \%$
   c) trikrat podraži za $5\ \%$
   č) desetkrat podraži za $5\ \%$
   d) enkrat poceni za $10\ \%$
   e) dvakrat poceni za $10\ \%$
   f) trikrat poceni za $10\ \%$
   g) dvajsetkrat poceni za $10\ \%$

2. Rebeka je v banko položila 2000 €. Banka uporablja letno obrestno mero $2{,}5\ \%$ in letni pripis obresti. Koliko ima Rebeka v banki?
   a) po 1 letu
   b) po 5 letih
   c) po dvajsetih letih

3. Kolikšne obresti dobimo, če v banko vložimo 600 € za pet let? Banka uporablja letno obrestno mero $1{,}8\ \%$ in letni pripis obresti.

4. Branko je v banki vezal 2000 € za tri leta. Ko se je vezava iztekla, je ves denar vezal še za 2 leti. Banka uporablja letno kapitalizacijo. Koliko je imel Branko na računu ob koncu druge vezave, če mu je banka za prvo vezavo priznala letno obrestno mero $2{,}4\ \%$ in za drugo $2{,}6\ \%$?

5. Kolikšen znesek je Tina vložila v banko, da je imela po štirih letih na računu $4415{,}25$ €? Banka uporablja letni pripis obresti in letno obrestno mero $2{,}5\ \%$.

6. Sandra je v banko položila $20\,000$ €. Po petih letih je imela na računu $23\,000$ €. Kolikšno letno obrestno mero uporablja banka, če je kapitalizacijsko obdobje eno leto?

7. Urška v banko vloži 2500 €. Banka uporablja letno obrestno mero $2{,}3\ \%$ in letni pripis obresti. Čez koliko let lahko Urška dvigne iz banke $3067{,}76$ €?

8. Kolikšen znesek naj vložimo v banko, da bomo dobili po petih letih 1000 € obresti? Banka uporablja letno obrestno mero $2{,}7\ \%$ in letni pripis obresti.

9. V banko vložimo nekaj denarja. Banka uporablja letno obrestno mero $2{,}06\ \%$ in letno kapitalizacijo. Čez koliko časa lahko iz banke dvignemo dvakrat toliko, kot smo vložili?

10. V banko smo položili $10\,000$ €. Banka uporablja letno kapitalizacijo in letno obrestno mero $2{,}42\ \%$.
    a) Koliko denarja imamo v banki po sedmih letih?
    b) Čez koliko let lahko dvignemo znesek $12\,108{,}16$ €?
    c) Čez koliko let obresti presežejo $3008{,}65$ €?
    č) Čez koliko let lahko dvignemo dvakrat toliko, kot smo vložili?

11. Na pet decimalnih mest natančno izračunaj relativni in konformni obrestovalni faktor za letno obrestno mero $2\ \%$ in obrestovalno dobo za:
    a) pol leta
    b) en mesec
    c) en dan
    č) četrt leta

12. Saška je v banko položila 1000 €. Banka uporablja relativno obrestovanje, letno obrestno mero $2{,}4\ \%$ in mesečno kapitalizacijo. Koliko ima Saška v banki ?
    a) po enem mesecu
    b) po petih mesecih
    c) po enem letu

13. Lara je v banko položila 2000 €. Banka uporablja konformno obrestovanje, letno obrestno mero $2{,}5\ \%$ in dnevni pripis obresti. Koliko ima Lara v banki?
    a) po enem dnevu
    b) po petdesetih dnevih
    c) po 90 dneh
    č) po enem letu

14. Tim je v banko vložil 1000 €. Koliko denarja bo imel čez pol leta, če banka uporablja:

a) polletno obrestno mero $1\ \%$ in je kapitalizacija polletna,

b) mesečno obrestno mero $0{,}3\ \%$ in je kapitalizacija mesečna?

15. Niko je v banki vezal 3000 €. Pripis obresti je mesečni. Koliko denarja bo Niko imel v banki čez 7 mesecev, če banka:

a) obrestuje relativno z letno obrestno mero $2{,}2\ \%$,

b) obrestuje konformno z letno obrestno mero $2{,}2\ \%$,

c) uporablja mesečno obrestno mero $0{,}18\ \%$?

16. V banko vložimo 5000 €. Kapitalizacija je dnevna. Koliko imamo v banki čez sto dni, če banka:

a) obrestuje relativno z letno obrestno mero $2{,}5\ \%$,

b) obrestuje konformno z letno obrestno mero $2{,}5\ \%$,

c) uporablja dnevno obrestno mero $0{,}007\ \%$?

17. Alja vloži 2000 € v banko, ki uporablja letno obrestno mero $2{,}1\ \%$, mesečno kapitalizacijo in konformno obrestovanje. Pia vloži 2000 € v banko, ki uporablja letno obrestno mero $2\ \%$, dnevno kapitalizacijo in relativno obrestovanje. Katera od njiju ima čez pol leta (180 dni)v banki več denarja in za koliko?

18. V banko smo položili $50\,000$ €. Banka uporablja polletno kapitalizacijo in polletno obrestno mero $1{,}4\ \%$.

a) Koliko denarja imamo v banki po petih letih?

b) Koliko odstotkov glavnice znašajo obresti po sedmih letih?

c) Čez koliko časa lahko dvignemo $60\,743{,}72$ €?

19. Rok je prijatelju posodil 3000 €. Zmenila sta se za navadno obrestovanje in letno obrestno mero $3\ \%$. Koliko denarja bo prijatelj vrnil Roku po:

a) petih letih, b) desetih letih, c) sedmih mesecih, č) dvajsetih dneh?

20. Peter je na banko položil 5000 €. Koliko bo imel na računu po osmih mesecih, če banka uporablja letno obrestno mero $2{,}5\ \%$ in:

a) relativno obrestovanje z mesečnim pripisom obresti,

b) konformno obrestovanje z mesečnim pripisom obresti,

c) navadno obrestovanje?

21. Anisa položi v banko $30\,000$ €. Po desetih mesecih ima na računu $30\,500$ €. Na štiri decimalna mesta natančno izračunaj, kolikšno letno obrestno mero uporablja banka, če je obrestovanje:

a) navadno,

b) relativno z mesečnim pripisom obresti,

c) konformno z mesečnim pripisom obresti?

22. Marisa veže v banki 6000 €. Koliko ima na računu po 6 letih in 5 mesecih, če banka uporablja letno obrestno mero $2{,}3\ \%$ in letni pripis obresti, za obdobja krajša od enega leta pa:

a) relativno obrestovanje in mesečni pripis obresti,

b) konformno obrestovanje in mesečni pripis obresti,

c) navadno obrestovanje?

9. OBROČNA VPLAČILA IN IZPLAČILA

Varčevanje denarja (obročna vplačila)

V banko enkrat ali večkrat vložimo denar (vloga/depozit).

Banka obrestuje naše vloge tako, da imamo čez čas na računu več denarja, kot smo ga vložili.

Izposojanje denarja (obročna vplačila)

Od banke si izposodimo denar (vzamemo posojilo/kredit/lizing).

Denar vračamo z enako velikimi zneski (obrok/anuiteta) ob določenem času.

Banka nam za izposojo zaračuna obresti tako, da moramo vrniti več, kot smo si izposodili.

Banka nam za odplačevanje dolga z mesečnimi obroki izdela amortizacijski načrt, ki za vsak posamezni mesec v času izposoje pove:

- koliko smo bili dolžni na začetku meseca,
- kolikšne obresti so se nam nabrale v tekočem mesecu,
- koliko smo dolžni ob koncu meseca po vplačilu anuitete.

Renta (obročna izplačila)

V banki imamo določeno vsoto denarja.

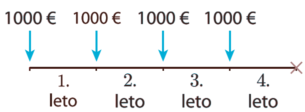
Črpati jo začnemo z enako velikimi zneski na izbrano časovno enoto (mesec, leto ...).

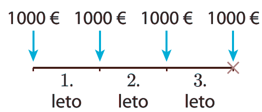
Rečemo, da dobivamo rento.

Renta je mesečna, če jo dobimo vsak mesec natanko enkrat.

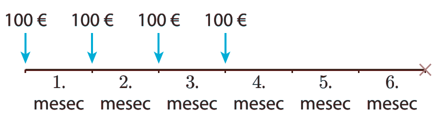
Večno rento dobivamo neomejeno dolgo.

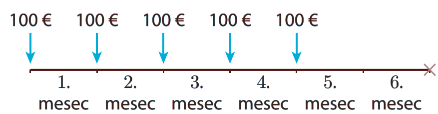
1. Banka uporablja za depozite letno obrestno mero $2{,}5~\%$. Modre puščice na sliki prikazujejo, kdaj in kolikokrat v to banko vložimo 1000 €. Izračunaj stanje v času, ki ga označuje križec.

a) 

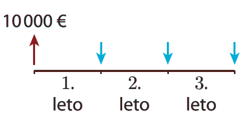
b) 

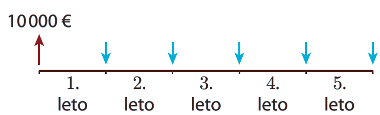
2. Banka uporablja za depozite letno obrestno mero $2{,}5~\%$. Modre puščice na sliki prikazujejo, kdaj in kolikokrat v to banko vložimo 100 €. Izračunaj stanje v času, ki ga označuje križec.

a) 

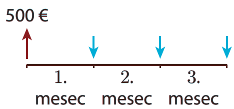
b) 

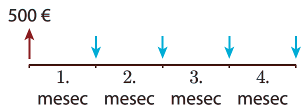
3. Banka uporablja za posojila letno obrestno mero $5{,}5~\%$. Vzamemo posojilo v višini $10\,000$ €, kar je na sliki prikazano z rjavo puščico. Modre puščice prikazujejo, kdaj in kolikokrat plačamo obrok. Izračunaj višino posameznega obroka.

a) 

b) 

4. Banka uporablja za posojila letno obrestno mero $5{,}5\ \%$. Vzamemo posojilo v višini 500 €, kar je na sliki prikazano z rjavo puščico. Modre puščice prikazujejo, kdaj in kolikokrat plačamo obrok. Izračunaj višino posameznega obroka.

a) 

b) 

5. Katarina bo štiri leta varčevala. Na začetku vsakega leta bo v banko položila 500 €. Banka uporablja letno obrestno mero $2{,}2\ \%$. Koliko denarja bo imela v banki:

a) ob zadnjem, četrtem pologu,

b) po štirih letih?

6. Dejan bo pet mesecev varčeval za maturantski izlet. Na začetku vsakega meseca bo v banko vložil 200 €. Banka uporablja letno obrestno mero $2{,}5\ \%$. Koliko denarja bo imel na računu:

a) ob zadnjem, petem pologu,

b) po petih mesecih?

7. Mia bo štiri leta varčevala za vozniški izpit. Na začetku vsakega meseca bo v banko položila 20 €. Banka uporablja letno obrestno mero $2{,}3\ \%$. Koliko denarja bo imela na računu po štirih letih?

8. Srečku Srečkoviču sta dedek in babica za vsak rojstni dan, od prvega do vključno desetega, na bančni račun nakazala 500 €. Koliko denarja ima Srečko na računu ob 18. rojstnem dnevu, če ni zapravil še nič denarja? Banka uporablja letno obrestno mero $2{,}6\ \%$.

9. Mama in ata sta kupila televizor za 1000 €. Ob nakupu sta plačala 200 €, preostali znesek pa sta odplačala z dvanajstimi mesečnimi obroki. Koliko obresti sta plačala, če je letna obrestna mera $5\ \%$ in so jima prvi obrok odtegnili od plače mesec dni po nakupu?

10. Tetka Marjetka je kupila avto za $10\,000$ €. Odločila se je, da bo polovico odplačala z gotovino, preostali znesek pa bo tri leta odplačevala s 36 mesečnimi obroki. Kolikšen je posamezni obrok, če je letna obrestna mera $4{,}5\ \%$ in bo prvi obrok plačala mesec dni po nakupu?

11. Jure je podedoval $100\,000$ €. Denar je vložil v banko, ki za vloge uporablja letno obrestno mero $2{,}4\ \%$. Kolikšno večno mesečno rento bo dobival?

12. Srečko Presrečkovič je na lotu zadel sedmico. V banko je vložil toliko denarja, da bo dobival večno mesečno rento 1000 €, ostale $\frac{3}{4}$ denarja je porabil za »manjše« nakupe. Koliko je bila vredna sedmica? Banka mu je priznala letno obrestno mero $2{,}6\ \%$. Od dobitka sedmice je moral plačati 20-odstotni davek.

13. Miha Preračunljivi si želi kupiti novo smučarsko opremo, ki stane 1000 €. Razmišlja takole:
- Opremo lahko kupim danes in jo odplačam z dvanajstimi mesečnimi obroki, začenši danes.
- Opremo lahko kupim čez natanko leto dni in do takrat varčujem z dvanajstimi mesečnimi pologi, začenši danes.

Koliko denarja bi Miha prihranil, če opreme ne bi kupil zdaj, ampak čez leto dni? Banka uporablja za varčevanje letno obrestno mero $2{,}5\ \%$ in za posojila $5{,}5\ \%$. Cena smučarske opreme se ne spreminja.

14. Anja bo dve leti zapored na začetku leta vložila v banko 4000 €. Denar bo dvignila v treh enakih zneskih. Prvega bo dvignila štiri leta po prvi vlogi, drugega leto za prvim in tretjega leto za drugim. Kolikšen bo obrok, če je kapitalizacija celoletna, banka pa uporablja $2{,}5\ \%$ letno obrestno mero?

15. Niko je vložil v banko tri leta zapored na začetku leta enak znesek. Denar bo dvignil v dveh enakih zneskih po 8000 €. Prvega bo dvignil pet let po zadnji vlogi, drugega pa leto kasneje. Kolikšna je bila posamezna vloga, če banka uporablja letno obrestno mero $2\ \%$ in letni pripis obresti?

16. Metka varčuje. Na začetku vsakega leta, od vključno 2007 do vključno 2012, je v banko vložila 2000 €. Privarčevani denar bo dvignila v štirih enakih zneskih. Prvega bo dvignila konec leta 2015, vsakega naslednjega pa leto kasneje. Kolikšen bo posamezen znesek?

17. Jan se je odločil varčevati v banki, ki za depozite uporablja letno obrestno mero $2{,}6\ \%$. Vložil je:
- 500 € v začetku leta 2000,
- 700 € v začetku leta 2001,
- 800 € v začetku leta 2002,
- 1000 € v začetku leta 2004.

a) Koliko je imel na računu po zadnjem pologu?

b) Koliko je imel na računu v začetku leta 2010?

c) Privarčevani denar je leta 2010 dvignil v dveh enako velikih zneskih; prvega na začetku leta in drugega ob koncu leta. Kolikšen je bil posamezni znesek?

18. Tina je pet let zapored na začetku leta v banko polagala 500 €, prvič v začetku leta 2002. Privarčevani denar je dvignila v treh enako velikih zneskih; prvega v začetku leta 2010, drugega v začetku leta 2011 in tretjega ob koncu leta 2012. Kolikšen je bil posamezni znesek, če banka za varčevanje priznava letno obrestno mero $2{,}4\ \%$?

19. Družina Cekin se je odločila, da bo s skupnimi močmi privarčevala za novo kuhinjo. Denar bodo na začetku vsakega meseca vložili v banko, ki priznava letno obrestno mero $2{,}3\ \%$. Vsak mesec prispevajo:
- starši 100 €,
- stari starši 50 €,
- otroci 10 €.

a) Koliko denarja bodo imeli na računu po letu dni, torej po 13. pologu?

b) Koliko pologov je potrebnih za kuhinjo v vrednosti $4092{,}38$ €? Kdaj jo lahko kupijo?

c) Družina Cekin bi lahko takoj kupila kuhinjo iste vrednosti in jo odplačala s posojilom. Posojilo bi vrnila s 25 mesečnimi obroki, prvim takoj ob nakupu. Kolikšen bi bil tedaj mesečni obrok za starše, stare starše in otroke, če bi razmerje njihovih prispevkov ostalo enako kot pri varčevanju? Banka za posojilo uporablja $5{,}8\ \%$ letno obrestno mero.

20. Teta in stric bosta kupila novo kopalno kad za 1500 €. Ob nakupu bosta plačala 500 €, preostali znesek pa bosta odplačala v petih mesečnih obrokih. Dopolni tabelo, ki prikazuje amortizacijski načrt. Zaračunajo jima letno obrestno mero $5\ \%$. Prvi obrok se plača mesec dni po nakupu.

Znesek posojila:	1000 €
Letna obrestna mera:	$5\ \%$
Odplačilna doba v mesecih:	5

Mesec	Stanje posojila na začetku meseca	Obresti	Anuiteta	Stanje posojila konec meseca
1.				
2.				
3.				
4.				
5.				

21. Mama in ata bosta otrokom kupila nov računalnik za 699 €. Ob nakupu bosta plačala 199 €, preostali znesek pa bosta poravnala v šestih mesečnih obrokih. Dopolni tabelo, ki prikazuje amortizacijski načrt. Zaračunajo jima letno obrestno mero $5{,}9\ \%$. Prvi obrok se plača mesec dni po nakupu.

Znesek posojila:	500 €
Letna obrestna mera:	$5{,}9\ \%$
Odplačilna doba v mesecih:	6

Mesec	Stanje posojila na začetku meseca	Obresti	Anuiteta	Stanje posojila konec meseca
1.				
2.				
3.				
4.				
5.				
6.				

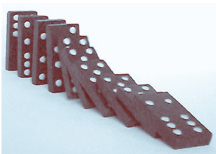
10. MATEMATIČNA INDUKCIJA

Princip matematične ali popolne indukcije

Izjava o naravnem številu n, ki jo označimo $A(n)$, velja za vsak $n \in \mathbb{N}$, če:

- velja izjava $A(1)$ in
- iz veljavnosti izjave $A(n)$ sledi veljavnost izjave $A(n+1)$.

1. Domine so postavljene v ravno vrsto. Kaj izvemo iz prve trditve in kaj iz druge?
Trditev 1: Pade prva domina.
Trditev 2: Pade prva domina in če pade katera koli domina, pade tudi domina neposredno za njo.



2. Naj bo $n \in \mathbb{N}$. Enakost dokaži z matematično indukcijo.

a) $1+2+3+4+\ldots+n=\frac{n(n+1)}{2}$

b) $2+7+15+26+\ldots+\frac{n(3n+1)}{2}=\frac{n(n+1)^2}{2}$

c) $3+7+11+\ldots+(4n-1)=2n^2+n$

č) $2+6+10+\ldots+(4n-2)=2n^2$

d) $3+8+13+\ldots+(5n-2)=\frac{n(5n+1)}{2}$

e) $1+2\cdot 2+3\cdot 2^2+4\cdot 2^3+\ldots+n\cdot 2^{n-1}=(n-1)\cdot 2^n+1$

f) $1\cdot 2\cdot 3+2\cdot 3\cdot 4+3\cdot 4\cdot 5+\ldots+n\cdot(n+1)\cdot(n+2)=\frac{1}{4}n\,(n+1)\,(n+2)\,(n+3)$

g) $1\cdot 3+2\cdot 5+3\cdot 7+\ldots+n\cdot(2n+1)=\frac{1}{6}n\,(n+1)\,(4n+5)$

h) $1\cdot 1+2\cdot 3+3\cdot 5+4\cdot 7+\ldots+n\,(2n-1)=\frac{n(n+1)(4n-1)}{6}$

i) $6\cdot 1+12\cdot 3+18\cdot 5+24\cdot 7+\ldots+6n(2n-1)=n(n+1)(4n-1)$

j) $1\cdot 2+2\cdot 5+3\cdot 8+\ldots+n(3n-1)=n^2(n+1)$

k) $3\cdot 5+5\cdot 7+7\cdot 9+\ldots$

l) $2\cdot 5+5\cdot 8+8\cdot 11+\ldots$

m) $\frac{3}{1\cdot 4}+\frac{3}{4\cdot 7}+\frac{3}{7\cdot 10}+\ldots+\frac{3}{(3n-2)(3n+1)}=\frac{3n}{3n+1}$

n) $\frac{1}{4\cdot 9}+\frac{1}{9\cdot 14}+\ldots+\frac{1}{(5n-1)\cdot(5n+4)}=\frac{n}{4(5n+4)}$

o) $\frac{1}{3\cdot 8}+\frac{1}{8\cdot 13}+\frac{1}{13\cdot 18}+\ldots+\frac{1}{(5n-2)(5n+3)}=\frac{n}{3(5n+3)}$

p) $\frac{1}{2\cdot 5}+\frac{1}{5\cdot 8}+\frac{1}{8\cdot 11}+\ldots+\frac{1}{(3n-1)(3n+2)}=\frac{n}{2(3n+2)}$

r) $\frac{1}{2\cdot 7}+\frac{1}{7\cdot 12}+\ldots+\frac{1}{(5n-3)\cdot(5n+2)}=\frac{n}{2(5n+2)}$

3. Z matematično indukcijo dokaži formulo za:

a) splošni člen aritmetičnega zaporedja

b) splošni člen geometrijskega zaporedja

4. Naj bo $n \in \mathbb{N}$. Dokaži trditev.

a) $3 \mid (n^3 + 2n)$ b) $5 \mid (n^5 - n)$ c) $6 \mid (5^{2n} - 1)$

č) $3 \mid (4^n + 6n + 5)$ d) $3 \mid (4^{n+1} + 5^{2n+1})$ e) $4 \mid (3^{2n+1} + 5^n)$

f) $17 \,\big|\, \left(3 \cdot 5^{2n+1} + 2^{3n+1}\right)$

5. Naj bo $n \in \mathbb{N}$. Dokaži neenakost.

a) $5^n > 6n,\ n \geq 2$ b) $2^n > n^2,\ n \geq 5$

c) $1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot \ldots \cdot n > 2^n,\ n \geq 4$ č) $1 + nx \leq (1 + x)^n;\ x > -1$

6. Izračunaj nekaj začetnih delnih vsot. Opazuj rezultate in sklepaj, kakšen je predpis za n-to vsoto. Nato z indukcijo dokaži pravilnost predpisa.

a) $\frac{1}{3} + \frac{1}{15} + \frac{1}{35} + \ldots + \frac{1}{4n^2-1},\ n \in \mathbb{N}$

b) $\frac{4}{1 \cdot 5} + \frac{4}{5 \cdot 9} + \frac{4}{9 \cdot 13} + \ldots + \frac{4}{(4n-3)(4n+1)},\ n \in \mathbb{N}$

c) $\frac{2}{2 \cdot 7} + \frac{2}{7 \cdot 12} + \ldots + \frac{2}{(5n-3) \cdot (5n+2)},\ n \in \mathbb{N}$

7. Zapiši predpis za splošni člen. Izračunaj nekaj začetnih delnih vsot in sklepaj, kakšen je predpis za n-to delno vsoto. Nato z indukcijo dokaži pravilnost predpisa.

a) $2 \cdot 2 + 2 \cdot 5 + 2 \cdot 8 + \ldots + 2(3n - 1) = n(3n + 1)$

b) $2 \cdot 3 + 2 \cdot 7 + 2 \cdot 11 + \ldots + 2(4n - 1) = 2n(2n + 1)$

c) $1 \cdot 4 + 2 \cdot 10 + 3 \cdot 16 + \ldots + n(6n - 2) = 2n^2(n + 1)$

č) $1 \cdot 8 + 2 \cdot 14 + 3 \cdot 20 + \ldots + n(6n + 2) = 2n(n + 1)^2$

8.* Zaporedje je podano rekurzivno:

$$a_1 = 7,\ a_2 = 29,\ a_{n+2} = 7a_{n+1} - 10a_n$$

Dokaži, da je splošni člen enak $a_n = 2^n + 5^n$.

9.* Zaporedje je podano rekurzivno:

$$a_1 = 3,\ a_2 = 4,\ a_{n+2} = a_{n+1} + a_n$$

Dokaži neenakost $a_n < 2^n$ za vse $n \geq 3,\ n \in \mathbb{N}$.

10. Fibonaccijevo zaporedje se začne z dvema enicama. Vsako naslednje število dobimo kot vsoto dveh predhodnih števil iz zaporedja.

a) Zapiši prvih deset členov Fibonaccijevega zaporedja.

b) Zapiši rekurzivni predpis.

c) Za Fibonaccijevo zaporedje obstaja poleg rekurzivnega tudi običajni predpis za splošni člen:

$$a_n = \frac{1}{\sqrt{5}} \cdot \left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^n - \frac{1}{\sqrt{5}} \cdot \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^n$$

Dokaži, da predpis ustreza Fibonaccijevemu zaporedju.

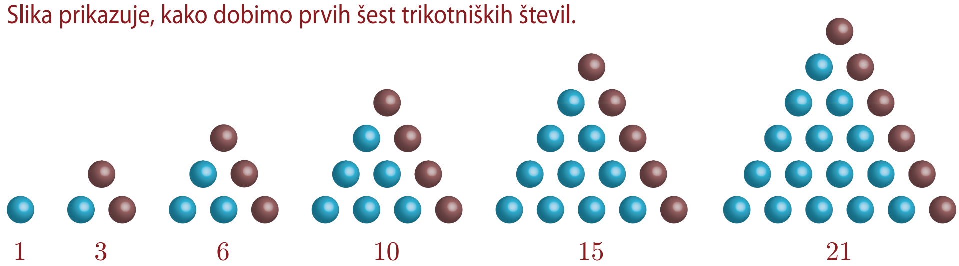
č) Izračunaj dvajseti člen Fibonaccijevega zaporedja na dva načina: z uporabo rekurzivnega zapisa in z uporabo pravkar dokazanega predpisa, pri čemer si lahko pomagaš z računalom.

d) Vse lihe člene Fibonaccijevega zaporedja nadometi s črko L, vse sode pa s črko S. Opazuj vzorec. Ali je stoti člen liho ali sodo število.?

11.* Pokaži, da velja $\sqrt{2 + \sqrt{2 + \sqrt{2 + \ldots + \sqrt{2}}}} = 2\cos\frac{\pi}{2^{n+1}}$, pri čemer na levi strani enakosti nastopa n dvojk.

12. Barbara in Bor sta se ukvarjala s formulo $1 + 2 + 2^2 + \ldots + 2^n = 2^{n+1}$, $n \in \mathbb{N}$. Bor je dokazal, da iz veljavnosti formule za naravno število n sledi veljavnost za $n + 1$. Barbara je ugotovila, da leva stran enakosti ne more biti enaka desni, saj je na levi strani liho število, na desni pa sodo. Kdo ima prav in kaj je narobe?

13. Slika prikazuje, kako dobimo prvih šest trikotniških števil.



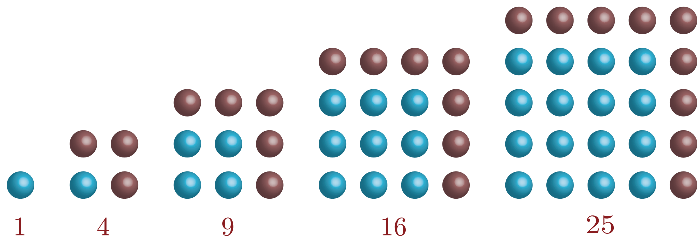
a) Ugotovi sedmo trikotniško število.

b) Ugotovi stoto trikotniško število.

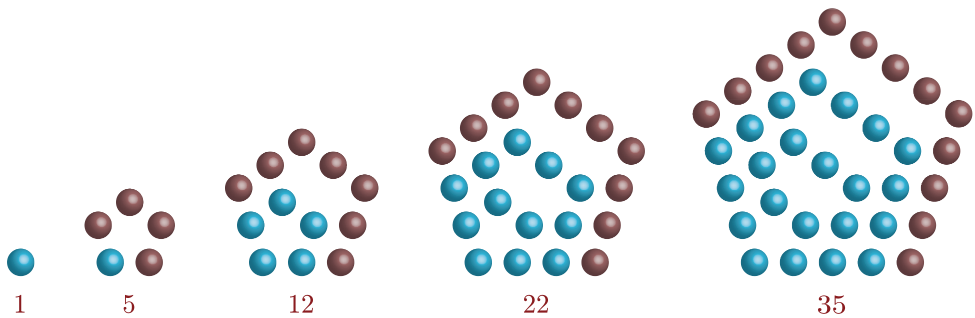
c) Ugotovi n-to trikotniško število.

č) Z matematično indukcijo dokaži predpis za n-to trikotniško število.

14. Ugotovi predpis za n-to kvadratno število in predpis dokaži s popolno indukcijo.



15.* Ugotovi predpis za n-to petkotniško število in predpis dokaži s popolno indukcijo.



16.* Poštnino plačujemo s poštnimi znamkami določene vrednosti. Pokaži, da lahko le z znamkami:

a) vrednosti 3 cente in 5 centov plačamo katero koli poštnino, višjo od 7 centov,

b) vrednosti 2 centa in 5 centov plačamo katero koli poštnino, višjo od 3 centev,

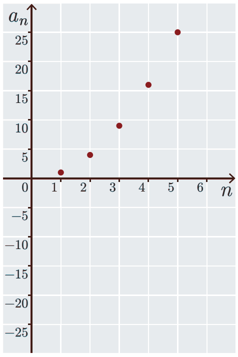
c) vrednosti 5 centov in 7 centov plačamo katero koli poštnino, višjo od 23 centov.

17.* Na nogometnem tekmovanju je sodelovalo $2n$ moštev. Odigrala so nekaj tekem. Poljubni moštvi sta odigrali največ eno medsebojno tekmo in nobena tri moštva niso med seboj odigrala treh tekem. Dokaži, da je bilo odigranih največ n^2 tekem.

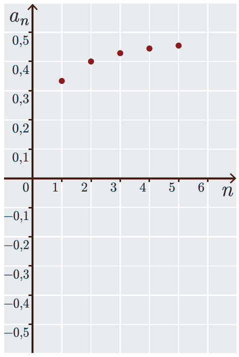
REŠITVE

ZAPOREDJA

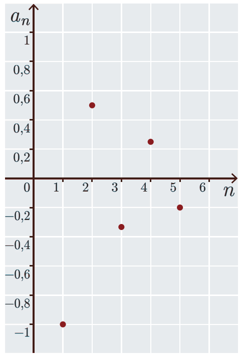
1. **a)** 1, 4, 9, 16, 25



b) $\frac{1}{3}, \frac{2}{5}, \frac{3}{7}, \frac{4}{9}, \frac{5}{11}$



c) $-1, \frac{1}{2}, -\frac{1}{3}, \frac{1}{4}, -\frac{1}{5}$



2. **a)** $a_n = n,\ b_n = 2n,\ c_n = 2n - 1$
b) $a_n = 3n,\ b_n = 3n + 1,\ c_n = 3n - 1$
c) $a_n = 4n,\ b_n = 4n + 6,\ c_n = 4n + 16$
č) $a_n = \frac{2n+3}{2n+8},\ b_n = \frac{5n+11}{4n+5},\ c_n = \frac{13-3n}{7+4n}$
d) $a_n = n^2,\ b_n = n^3,\ c_n = (-1)^{n+1} \cdot n^2$
e) $2^n,\ 2^{n+2},\ n^3 + 1$
f) $a_n = \frac{n^2}{2^n},\ b_n = \frac{2^{n-1}}{3^{n-1}},\ c_n = (-1)^n \cdot \frac{(n+1)^3}{(n+2)^2}$
g) $a_n = \left|\sin\left(\frac{\pi}{2} \cdot n\right)\right|,\ b_n = \left|\cos\left(\frac{\pi}{2} \cdot n\right)\right|,\ c_n = n\left|\sin\left(\frac{\pi}{2} \cdot n\right)\right|$

3. **a)** $a_n = \frac{2n+3}{7n-4}$ **b)** $a_n = \frac{3n+2}{2n+1}$ **c)** $a_n = \frac{1}{(2n+1)(2n+3)}$ **č)** $a_n = n(2n-1)$

4. **a)** $a_n = n$ **b)** $a_n = 2n$ **c)** $a_n = 2n - 1$ **č)** $a_n = 3n$
d) $a_n = 3n - 1$ **e)** $a_n = 7n - 2$

5. $-11, -11, -11, -11, -11, -11$
5, 11, 23, 47, 95, 191

6. **a)** $a^{20} = 333$ **b)** Ne. **c)** Od vključno 102. člena naprej.

7. **a)** 0,710 **b)** Da. **c)** Od vključno 130 000. člena naprej.

8. **a)** $0, -1, 0, 1, 0, -1, 0, 1, 0, -1$ **b)** $a^{102} = -1$ **c)** -1

9. **a)** $a^{20} = -0{,}8230$ **b)** Člen a^{97} je enak -1. **c)** Od -1 je večjih 96 členov.

10. **a)** 5, 8, 11, 14, 17 **b)** -2, 5, 26, 677, 458 330
c) 3, 5, 11, 21, 43 **č)** 1, 2, 6, 15, 37

11. 44, 54, 64, 74, 84; $a_n = 10n + 34$, $a^{1000} = 10034$

12. 1, 3, 7, 15, 31; $a_n = 2^n - 1$, $a^{500} = 2^{500} - 1$

13. $a_3 = 10$, $a_3{}' = \frac{3}{17}$

14. a) $x = -10$ b) $x = -1$ c) $x = 24$ č) $x = 19$
d) $x = -7$ e) $x = 14$ f) $x = 3$ g) $x = 8$

15. $a^{100} = 110$

16. a) $1, 2, 4, 7, 11, 16, 22, 29, 37, 46$ b) $2, 3, 5, 8, 12, 17, 23, 30, 38, 47$

c)
- **a)** L, S, S, L, L, S, S, L, L, S; Prve štiri črke so L, S, S, L. Vsaka naslednja četverica je identična, saj se parnost števila ne spremeni, če prištejemo štiri zaporedna naravna števila (njihova vsota je sodo število). Črka na mestih $4n$ in $4n + 3$ je torej L, na mestih $4n + 1$ in $4n + 2$ pa S.
- **b)** S, L, L, S, S, L, L, S, S, L; Prve štiri črke so S, L, L, S. Vsaka naslednja četverica je identična, saj se parnost števila ne spremeni, če prištejemo štiri zaporedna naravna števila (njihova vsota je sodo število). Črka na mestih $4n$ in $4n + 3$ je torej S, na mestih $4n + 1$ in $4n + 2$ pa L.

17. a) Na sliki je $23\,409$ točk. b) Dorišemo 880 točk.
c) Na simetrali leži 477 točk. č) Narisanih je $39\,601$ točk.

18. a) Ne. b) $a_n = 4n - 2$ c) V točki $(0, -64)$.
č) Stoti odsek je dolg $\sqrt{20201} \doteq 142{,}13$ enot.

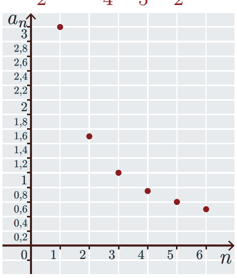
19. a) Iz 32 desk. b) $d_n = 4n + 4$ c) Ima 225 ovac.
č) $o_n = n^2$ d) Po 21 letih.

20. a) $16, 96, 40$ b) $100, 600, 220$ c) $n^2,\ 6n^2,\ 2n(n + 1)$

21. Roparja so ujeli 8. marca v Lendavi. Deseti rop bi bil 13. marca v Mariboru.

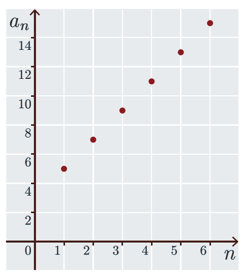
LASTNOSTI ZAPOREDIJ

1. a) $3,\ \frac{3}{2},\ 1,\ \frac{3}{4},\ \frac{3}{5},\ \frac{1}{2}$



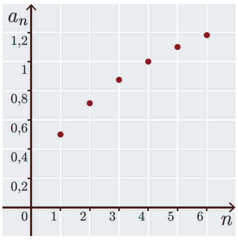
b) Da. Ne. Ne.
c) Da. Da. Da.
č) Da. Ne. Ne.
d) a. Da. Ne.
e) Da.

2. a) $5, 7, 9, 11, 13, 15$



b) Narašča. Dokaz: $a_{n+1} - a_n = 2 \geq 0$.
c) Ne.
č) Da, saj je $a_{3180} = 6363$
d) Manjših je $26\,779$ členov.

3. a) $\frac{1}{2}$, $\frac{5}{7}$, $\frac{7}{8}$, 1, $\frac{11}{10}$, $\frac{13}{11}$



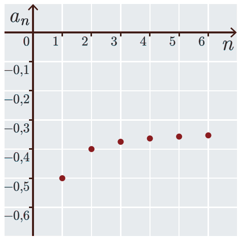
b) Narašča, saj je $a_{n+1} - a_n = \frac{9}{(n+6)(n+5)} \geq 0$

c) Da, saj je navzgor in navzdol omejeno. Navzdol je omejeno z $\frac{1}{2}$, saj je $a_n \geq \frac{1}{2}$; $n \geq 1$.

Navzgor je omejeno z 2, saj lahko zapišemo $a_n = 2 - \frac{9}{n+5}$.

č) 115 členov.

4. a) $-\frac{1}{2}$, $-\frac{2}{5}$, $-\frac{3}{8}$, $-\frac{4}{11}$, $-\frac{5}{14}$, $-\frac{6}{17}$



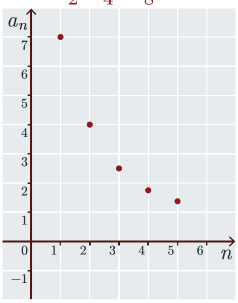
b) Narašča, saj je $a_{n+1} - a_n = \frac{1}{(3n+2)(3n-1)} \geq 0$

c) Da, saj je navzgor in navzdol omejeno. Navzdol je omejeno z $-\frac{1}{2}$, saj je $a_n \geq -\frac{1}{2}; n \geq 1$

Navzgor je omejeno z 0, saj so vsi členi negativni.

č) 100 členov.

5. a) 7, 4, $\frac{5}{2}$, $\frac{7}{4}$, $\frac{11}{8}$



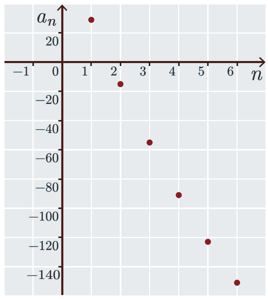
b) Pada, sa je $a_{n+1} - a_n = -3 \cdot 2^{1-n} \leq 0$.

c) Da, saj je navzgor in navzdol omejeno. Navzdol je omejeno z 0 saj so vsi členi pozitivni.

Navzgor je omejeno s 7, saj je $a_n \leq 7 \Leftrightarrow n \geq 1$.

č) Vsi členi od vključno 24. naprej.

6. a) $29, -15, -55, -91, -123, -151$



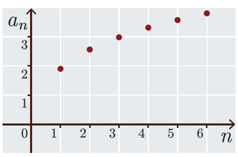
b) Zaporedje ni monotono, saj:

- pada za $n \leq 12$
- narašča za $n \geq 13$

c) Ne, saj je navzgor neomejeno.

č) Za $n = 1$ in $n \geq 24$.

7. a) $1{\cdot}90, 2{\cdot}56, 2{\cdot}98, 3{\cdot}31, 3{\cdot}57, 3{\cdot}80$



b) Zaporedje je monotono, saj povsod narašča:
$a_{n+1} - a_n = 2\log\frac{n^2+9n+9}{n^2+7n+1} \geq 2\log 1 = 0$

c) Ne, saj je navzgor neomejeno.

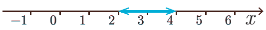
č) 312 členov.

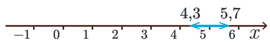
8. d) $a_n = \frac{n+1}{3n+4}$; zaporedje je strogo naraščajoče inr omejeno, natančna spodnja meja je $m_0 = \frac{2}{7}$, natančna zgornja meja je $M_0 = \frac{1}{3}$

9. $-1, -2, -3, 5$

10. $3, 3, 6, 2, 2$

LIMITA ZAPOREDJA

1. a) 

b) 

2. a) Ne. b) Ne.

3. a) Vsi členi od vključno a_{501} naprej. b) Začetnih 5000 členov.

4. a) Vsi členi od vključno a_{14} naprej. b) Začetnih 12 členov.

5.

	Zaporedje	Členi	Stekališča	Limita	Konvergentno/ divergentno
a)	a_n	$1, 4, 9, 16, \ldots$	Nima.	Nima.	Divergentno.
	b_n	$7, 9, 11, 13, \ldots$	Nima.	Nima.	Divergentno.
	c_n	$3, 4, 13, 36, \ldots$	Nima.	Nima.	Divergentno.
b)	a_n	$0, -1, 0, 1, \ldots$	$0, 1, -1$	Nima.	Divergentno.
	b_n	$-1, 1, -1, 1, \ldots$	$1, -1$	Nima.	Divergentno.
	c_n	$1, 1, 1, 1, \ldots$	1	1	Konvergentno.
c)	a_n	$-1, 1, -1, 1, \ldots$	$1, -1$	Nima.	Divergentno.
	b_n	$0, 4, 0, 8, \ldots$	0	Nima.	Divergentno.
	c_n	$-\frac{1}{2}, \frac{1}{4}, -\frac{1}{8}, \frac{1}{16}, \ldots$	0	0	Konvergentno.
č)	a_n	$-1, \frac{1}{2}, -\frac{1}{3}, \frac{1}{4}, \ldots$	0	0	Konvergentno.
	b_n	$2, \frac{5}{3}, \frac{3}{2}, \frac{7}{5}, \ldots$	1	1	Konvergentno.
	c_n	$-\frac{1}{3}, \frac{1}{2}, -\frac{3}{5}, \frac{2}{3}, \ldots$	$1, -1$	Nima.	Divergentno.

6. a) Začetnih 2997 členov. b) 1
c) 1 č) Da.

7. a) Vsi členi z lihimi indeksi. b) $1, -1$
c) Limita ne obstaja. č) Ne.

8. a) Členi, katerih indeks da pri deljenju z 8 ostanek 2. b) $0, \frac{\sqrt{2}}{2}, 1, -\frac{\sqrt{2}}{2}, -1$
c) Limita ne obstaja. č) Ne.

9. a) 6 členov. b) 1 c) 1 č) Da.

10. $a_n = \frac{2n-1}{5n-3}$, zaporedje je strogo padajoče in omejeno, natančna spodnja meja je $m_0 = \frac{2}{5}$, natančna zgornja meja je $M_0 = \frac{1}{2}$
a) V tej okolici ležijo členi a_n, za katere je $n > 40$. b) $\left[\frac{2}{5}, \frac{1}{2}\right]$

11. a) $4{,}63$ cm
b) Ravnovesna lega. Limita odmikov $\{a_n\}$ je 0.
c) 47-krat.

RAČUNANJE Z LIMITAMI

1. a) $a_{10} = 2{,}923,\ a_{100} = 2{,}999,\ \lim\limits_{n\to\infty} a_n = 3$
   $b_{10} = 0{,}314,\ b_{100} = 0{,}030,\ \lim\limits_{n\to\infty} b_n = 0$
   $c_{10} = 22{,}407\ \ c_{100} = 289{,}879,$ limita ne obstaja

   b) $a_{10} = 20{,}050,\ a_{100} = 200{,}005,$ limita ne obstaja
   $b_{10} = 0{,}050,\ b_{100} = 0{,}005,\ \lim\limits_{n\to\infty} b_n = 0$
   $c_{10} = -89{,}950,\ c_{100} = -9899{,}995,$ limita ne obstaja

   c) $a_{10} = 1\,048\,576,\ a_{100} = 1{,}6\cdot 10^{60},$ limita ne obstaja
   $b_{10} = 0{,}000104,\ b_{100} = 1{,}6\cdot 10^{-40},\ \lim\limits_{n\to\infty} b_n = 0$
   $c_{10} = 0{,}017,\ c_{100} = 2{,}46\cdot 10^{-18},\ \lim\limits_{n\to\infty} c_n = 0$

   č) $a_{10} = 1\,342\,265{,}931,\ a_{100} = 2{,}06\cdot 10^{60},$ limita ne obstaja
   $b_{10} = 2{,}594,\ b_{100} = 2{,}705,\ \lim\limits_{n\to\infty} b_n = e$
   $c_{10} = 0{,}00098,\ c_{100} = 1{,}9\cdot 10^{-39},\ \lim\limits_{n\to\infty} c_n = 0$

2. a) 2 b) 0 c) 0
   č) Limita ne obstaja. d) $-\frac{5}{2}$ e) Limita ne obstaja.

3. a) 1 b) 0 c) Limita ne obstaja.
   č) 5 d) $\frac{3}{5}$ e) 0

4. a) $\frac{1}{2}$ b) -2 c) $-\frac{3}{4}$
   č) 0 d) Limita ne obstaja. e) $-\frac{1}{2}$
   f) 2 g) $\frac{16}{5}$

5. a) e^5 b) e^3 c) e^{-2} č) e^2
   d) e^{-10} e) e^{-18} f) $e^{\frac{3}{2}}$ g) e^{-10}

6. a) $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = 2$ b) Od vključno a_{1000} naprej. c) 199 členov.

7. a) Narašča, saj je $a_{n+1} - a_n = \frac{5}{(3n+1)(3n-2)} \geq 0$
   b) Zaporedje je omejeno, saj je navzgor in navzdol omejeno. Navzgor je omejeno z $\frac{2}{3}$, saj velja $a_n \leq \frac{2}{3} \Leftrightarrow 0 \leq 5$, kar velja za vsak n. Navzdol je omejeno z -1, saj velja $a_n \geq -1 \Leftrightarrow n \geq 1$ za vsak $n \in \mathbb{N}$.
   c) 278 členov.

8. a) $\frac{1}{5}, \frac{3}{7}, \frac{5}{9}, \frac{7}{11}$
   b) Ker je $a_{n+1} - a_n = \frac{8}{(2n+3)(2n+5)} \geq 0,$ zaporedje narašča.
   c) Natančna spodnja meja je $\frac{1}{5}$, natančna zgornja meja pa 1.

9. b) Zaporedje je monotono, saj je padajoče za vsak $n \in \mathbb{N}$: $a_{n+1} - a_n = \frac{-6}{(4n+3)(4n-1)} \leq 0.$
   Zaporedje je omejeno, saj ima natančno spodnjo mejo $\frac{1}{2}$ in natančno zgornjo mejo 1.
   b) $1, \frac{5}{7}, \frac{7}{11}, \frac{3}{5}, \frac{11}{19}$

10. a) Pada, saj je $a_{n+1} - a_n = -3 \cdot 2^{-n-1} < 0$.

b) Zaporedje je omejeno, saj je navzgor in navzdol omejeno. Navzgor je omejeno s $5{\cdot}5$, saj velja: . Navzdol je omejeno s 4, saj velja $a_n \geq 4 \Leftrightarrow 3 \cdot 2^{-n} \geq 0$ za vsak $n \in \mathbb{N}$.

c) 11 členov

11. Razlikujeta se za $2{,}07$.

12. Ne.

13. Številu 2.

14. a) $\check{z}_n = 980 + 20n$ b) $m_n = 775 + 25n$
c) 42. leto. č) Številu $\frac{4}{5}$.

15. a) $p_n = 38 + 2n$ b) $k_n = 5 + 5n$
c) 71. leto. č) Številu $\frac{4}{5}$.

ARITMETIČNO ZAPOREDJE

1. a) 55, 64, 73, 82, 91 b) 78, 54, 30, 6, -18 c) 31, 36, 41, 46, 51
č) 45, 37, 29, 21, 13 d) 52, 65, 78, 91, 104 e) 78, 69, 60, 51, 42, 33

2. a) $a_1 = 5$ b) $d = 3$ c) $a_5 = 17$
č) $a_n = 2 + 3n$ d) $a_{100} = 302$

3. a) $a_1 = 5$ b) $d = -4$ c) $a_4 = -7$
č) $a_n = 9 - 4n$ d) $a_{75} = -291$

4. a) 12, 16, 20, 24, 28 b) $a_n = 8 + 4n$ c) $a_{85} = 348$

5. a) 25, 17, 9, 1, -7 b) $a_n = 33 - 8n$ c) $a_{1000} = -7967$

6. $a_n = 6n + 2$

7. $a_{50} = -228,\ a_{50} = -439{,}2$

8. Pozitivnih je 6 členov.

9. $a_1 = 2,\ a_2 = 25,\ a_3 = 3$ ali $a_1 = 3,\ a_2 = 25,\ a_3 = 2$

10. $I.\ a_1 = -1,\ d = 2;$ $II.\ a_1 = \frac{730}{7},\ d = -\frac{120}{7}$

11. $a_1 = 5,\ d = 2$

12. $a_1 = 1,\ d = 3$

13. 1, 4, 7, 10

14. 1, 3, 5, 7, 9 ali $-1, -3, -5, -7, -9$ ali 9, 7, 5, 3, 1 ali $-9, -7, -5, -3, -1$

15. To so števila 2, 4, 6, 8. Da, $5 - \sqrt{241},\ 5 - \frac{\sqrt{241}}{3},\ 5 + \frac{\sqrt{241}}{3},\ 5 + \sqrt{241}$.

16. a) $a_n = 61 - 8n$ b) $a_{88} = -643$ c) Ne. č) 32 členov.

17. a) $x_1 = 0,\ x_2 = \frac{1}{2}$ b) $x = 4$ c) $x = 1$ č) $x = 10$
d) $x = 2$ e) $x_1 = 2k\pi,\ x_2 = \frac{2\pi}{3} + 2k\pi;\ k \in \mathbb{Z}$

18. $x = 1,\ y = -2$ **19.** $a_5 = 53$ **20.** $a_{10} = -\frac{3}{29}$

21. a) 6636 b) 2109 c) 353 č) 362 d) 579

22. S 5 ali 6 je deljivih 2042 števil.

23. Trimestnih števil, ki niso deljiva ne s 4 in ne s 7, je 579.

24. Ker je razlika med poljubnima zaporednima členoma $a_{n+1} - a_n = -12$ konstantna, je zaporedje aritmetično.

25. ($\Rightarrow$) Ker je $a - b,\ b - c,\ c - a$ aritmetično, velja $a_2 - a_1 = a_3 - a_2$, iz česar dobimo $b = c$.
($\Leftarrow$) Ker velja $b = c$, je zaporedje $a - b,\ 0,\ b - a$, iz česar dobimo $a_2 - a_1 = b - a = a_3 - a_2$.

26. a) 215 b) -2400 c) 25 400

27. 10 000

28. Porabimo 19 900 pločevink.

29. 513 105

30. $S_{99} = -350\,163$

31. 19 975

32. $x = 216$

33. 114 563

34. Sešteti moramo 77 začetnih členov.

35. Sešteti moramo vsaj 36 začetnih členov.

36. *I.* $S_{20} = 610,\ a_{180} = 539$; *II.* $S_{20} = -110,\ a_{180} = -514$

37. Srednji člen je enak $a_{11} = 136$.

38. Da, saj je $a_{66} = -259{,}5$.

39. 32 768

40. Vrinili smo 46 števil.

41. Vrinili smo 11 števil.

42. 1272

43. $S_1 + S_2 + S_3 + \ldots + S_{10} = 3025$

44. $a_n = 10n - 6$

45. a) Večjih je 341 členov. b) Sešteti moramo vsaj 29 členov. c) -544

46. a) 1155 b) 885 c) Ni.

47. Med 1 in 10^{50} je 1275 števil z vsoto števk enako 2.

48. a) Vrgel je 196 centov. b) 20. maja. c) Tehtal je 154,4703 kg.

49. a) 270 počepov in 135 sklec. b) 133 590 počepov.
c) 15,46 dni. č) 16. maja.

50. Človek na sredini kolone je visok 1,74 m.

51. a) Ne. b) Da. c) Ne.
č) Naredi 51 enot dolgo pot. d) Naredi 8 006 001 enot dolgo pot.

52. a) Porabimo 3 vžigalice in 10 zrn. b) Porabimo 3 vžigalice in n zrn.
c) Porabimo 31 vžigalic in 55 zrn. č) Porabimo $1+3n$ vžigalic in $\frac{n(n+1)}{2}$ zrn.
d) Najmanj 6 kvadratov.

53. 4 cm, 6 cm, 8 cm

54. $c = 5$ dm, $a = 11$ dm

55. a) 3 cm, 14 cm , 15 cm b) 7 cm, 8 cm, 9 cm
c) 3 cm, 4 cm, 5 cm ali $\left(\frac{\sqrt{19}}{2}-1\right)$cm, $\frac{\sqrt{19}}{2}$ cm, $\left(\frac{\sqrt{19}}{2}+1\right)$cm

56. $\pm 30°$

57. $x = \frac{(5-\sqrt{13})a}{6}$

58. Osnovnici trapeza sta dolgi 7 cm in 1 cm.

59. Ploščina trapeza $ABCD$ je 72 cm^2.

60. a) Prejemala je 1500 € plače. b) Prejemala je 1556,25 € plače. c) 13. leto.

61. a) $\frac{1}{2}, \frac{1}{4}, \frac{1}{6}, \frac{1}{8}, \frac{1}{10}, \ldots$ ali $\frac{1}{5}, \frac{1}{8}, \frac{1}{11}, \frac{1}{14}, \ldots$
b) Če je $a+b,\ a+c,\ b+c$ harmonično, mora biti $\frac{1}{a+b}, \frac{1}{a+c}, \frac{1}{b+c}$ aritmetično.
$\frac{1}{a+c}-\frac{1}{a+b}=\frac{1}{b+c}-\frac{1}{a+c};\ b^2-c^2=a^2-b^2 \Leftrightarrow b^2-a^2=c^2-b^2$
Ker je $a^2,\ b^2,\ c^2$ aritmetično zaporedje, zadnja enakost vedno velja. Zato tudi prva enakost vedno velja in je zaporedje $\frac{1}{a+b}, \frac{1}{a+c}, \frac{1}{b+c}$ aritmetično. Zato je zaporedje $a+b,\ a+c,\ b+c$ harmonično.

GEOMETRIJSKO ZAPOREDJE

1. a) $a_1 = 2$ b) $q = 5$ c) $a_5 = 1250$
č) $a_n = 2\cdot 5^{n-1}$ d) $a_{100} = 2\cdot 5^{99}$

2. a) $a_1 = 40$ b) $q = \frac{1}{2}$ c) $a_4 = 5$
č) $a_n = 40\cdot\left(\frac{1}{2}\right)^{n-1} = 5\cdot 2^{-n+4}$ d) $a_{75} = 5\cdot 2^{-71}$

3. a) 12, 48, 192, 768 b) $a_n = 12\cdot 4^{n-1} = 3\cdot 4^n$ c) $a_{85} = 12\cdot 4^{84} = 3\cdot 4^{85}$

4. a) 25, 5, 1, 02, 004 b) $a_n = 25\cdot 0{,}2^{n-1} = 5^{-n+3}$ c) $a_{1000} = 5^{-997}$

5. a) $a_n = 14\cdot\left(\frac{1}{2}\right)^{n-1} = 7\cdot 2^{-n+2}$ b) $a_{88} = 7\cdot 2^{-86}$
c) Da, saj je $a_{11} = \frac{7}{512}$. č) Večjih je 18 členov.

6. $a_7 = 250$

7. $a_n = 30\cdot(-3)^{-n+1}$

8. $a_4 = 18$

9. $a_n = 3\cdot 5^{n-3}$

10. $a_n = \frac{5}{3}\cdot 2^{-n+4}$

11. $I.\ a_1 = \frac{1}{4},\ q = 2;\ II.\ a_1 = -\frac{1}{4},\ q = -2;\ III.\ a_1 = \frac{1}{4},\ q = -2;\ IV.\ a_1 = -\frac{1}{4},\ q = 2$

12. $a_1 = \frac{1}{2},\ q = 2$

13. $6, 12, 24, 48, 96, 192$

14. $1620, -540, 180, -60, 20$

15. a) $x = 0$ b) $x = 4$ c) $x = 1$ č) $x = -1$
d) $x_1 = k\pi,\ x_2 = \frac{\pi}{3} + k\pi;\ k \in \mathbb{Z}$ e) $x = -\frac{3}{4}$

16. Za $a_1 = \frac{13}{3},\ b_1 = -\frac{5}{3}$ in $a_2 = -\frac{13}{3},\ b_2 = \frac{5}{3}$.

17. $a = -3$, rešitve enačbe so $\frac{1}{3}$, 1 in 3

18. a) $S_{10} = 2046$ b) $S_9 = 1093\frac{4}{9}$

19. a) 6141 b) $97\,656\frac{1}{5}$

20. $S_9 = 2343 + 468\sqrt{5}$

21. $S_8 = -131\frac{17}{48}$

22. $S_{21} = 10\,481{,}22$

23. $a_6 = -5$

24. Sešteti moramo vsaj 25 začetnih členov.

25. Količnik je $q = \frac{1}{2}$.

26. 50

27. a) $-54,\ -18,\ -6,\ -2,\ -\frac{2}{3},\ -\frac{2}{9}$ b) $\frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{1}{3} = q$
c) $S_{10} = -80\frac{728}{729}$ č) $a_n = -54 \cdot 3^{-n+1} = -2 \cdot 3^{4-n}$
d) 0

28. Imela je še $28{,}24$ €.

29. $|CX| = \sqrt{\sqrt[3]{2} - 1},\ |CY| = \sqrt{\sqrt[3]{4} - 1}$

30. Višina je dolga $(\sqrt{5} + 1)$ cm, stranica kvadrata pa $(\sqrt{5} - 1)$ cm.

31. $R = \frac{abc}{4S} = \frac{a^2}{2v_c};\ \frac{2R}{a} = \frac{a}{v_c} = q$

32. $30°$

33. Daljša osnovnica je dolga 3 enote, krajša pa 1 enoto.

34. a) $x \geq 5$ b) $x = 6$ c) $x = 10$

35. a) 150 b) $301{,}64$

36. a) $31\frac{2}{3}$ cm, $43\frac{1}{3}$ cm b) 30 cm, 45 cm

37. a) 9 cm, 12 cm, 15 cm b) $9{,}25$ cm, $11{,}77$ cm, $14{,}97$ cm

38. AZ: $2, 7, 12$ in GZ: $3, 6, 12$

39. GZ: $2, 6, 18$ in AZ: $2, 10, 18$

40. AZ: $9, 6, 3$ in GZ: $9, 6, 4$

41. GZ: $1, 5, 25$ in AZ: $1, 13, 25$

42. $I.\ 14, 0, 0, \ldots;\ S_{10} = 14;\ II.\ 2, 4, 8, \ldots;\ S_{10} = 2046$

43. $1, 3, 5$

44. $2, 6, 18$

45. AZ: $3, 6, 9$; GZ: $3, 6, 12$

46. AZ: $a_1 = 3,\ d = 5$; GZ: $a_1 = 8,\ q = 3{,}5$

47. $I.\ a_n = 15$; $II.\ a_n = 4n - 3$

48. a) V petih minutah izve novico vsa vas. b) V 20 minutah bi novico izvedela vsa Slovenija.

49. Prva bo prečkala cilljno črto kobilica, saj kobilica potrebuje za pot $116{,}61$ s, bolha pa $249{,}79$ s.

50. a) 2^{52} b) $2^{64} - 1$ c) $\frac{1}{3}\left(4^{32} - 1\right)$ č) $\frac{16}{255}\left(2^{64} - 1\right)$

51. a) Potrebuje $27{,}5$ m desk. b) Za $8{,}16\ \%$. c) Potrebuje 7 desk dolgih 4 m.

52. a) Od vključno 6. člena naprej. b) Sešteti moramo tri člene. c) $\frac{1}{17}\left(18^4 - 18^{16}\right)$

53. a) 665 b) 90 c) $q_{1,2} = \pm\frac{\sqrt{6}}{2}$

54. a) $a_n = t \cdot 2^{n-1}$ b) Za $t = 0$. c) Za $t < 0$.
č) Za $t \leq 0$. d) $t = -\frac{1}{64}$ e) $t = \frac{1}{2}$

GEOMETRIJSKA VRSTA

1. a) 2 b) Ne obstaja. c) $13{,}5$ č) Ne obstaja.

2. a) 2 b) Ne obstaja. c) Ne obstaja. č) $\frac{1}{9}$

3. Za $1{,}73\ \%$·

4. a) 2 b) $5\sqrt{5}$

5. a) $\frac{1}{3}$ b) $\frac{19}{15}$ c) $\frac{1052}{495}$

6. a) $x = 9$ b) $\frac{\sqrt{3}}{9}$

7. $40 - 20\sqrt{2}$

8. $q = \frac{3}{4}$

9. $q_1 = \frac{4}{5},\ q_2 = \frac{1}{5}$

10. 12

11. a) Za $x \in (-1, 1)$. b) Za $x \in \left(-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right)$. c) Za $x \in (-\infty,\ -1) \cup (1,\ \infty)$.

12. a) $x_1 = 0,\ x_2 = \frac{1}{2}$ b) $x = 2$ c) $x = n$

13. a) $x \in \left(-\frac{1}{3}, \frac{1}{3}\right)$ b) 5 c) Ni takega x.

14. a) $x \in (-1, 0)$ b) 2 c) Za $x = -\frac{1}{6}$.

15. a) Za $x \in (-\infty, -3) \cup (-1, \infty)$. b) $\frac{5}{24}$ c) Za $x_1 = -\frac{2}{3}$, $x_2 = -\frac{1}{2}$.

16. a) $x \in (-\infty,\ 0)$ b) $\frac{8}{7}$ c) $x = \frac{1}{38}$
č) $x_1 = \log_3 8 - 2$, $x_2 = -2$

17. a) $2^x + 2^{x-1} + 2^{x-2} + \ldots$ b) Ker je $q = 0{,}5$, je $-1 < q < 1$ in zato vrsta konvergira.
c) 6 b) Za $x = 5$.

18. Vsota ploščin je $\frac{1}{3}$ dm^2, vsota obsegov pa 4 dm.

19. Vsota ploščin je $2a^2$, vsota obsegov pa $(8 + 4\sqrt{2})a$.

20. a) $\left(4 + 2\sqrt{2}\right)\pi r$ b) $\left(8 + 8\sqrt{2}\right) r$ c) $2\pi r^2$ č) $4r^2$

21. a) $\frac{2\sqrt{3}\pi a}{3}$ b) $6a$ c) $\frac{\pi a^2}{9}$ č) $\frac{\sqrt{3}a^2}{3}$

22. a) Zaporedje obsegov $3a,\ 3a \cdot \frac{4}{3},\ 3a \cdot \left(\frac{4}{3}\right)^2,\ 3a \cdot \left(\frac{4}{3}\right)^3,\ \ldots$ je geometrijsko s količnikom $\frac{4}{3}$. Ker je količnik večji od 1, členi divergirajo in zato obseg Kochove snežinke ni končen.

b) Ploščina Kochove snežinke je enaka vsoti ploščin vseh trikotnikov:
$S_0 + 3 \cdot \frac{S_0}{9} + 3 \cdot 4 \cdot \frac{S_0}{81} + 3 \cdot 4^2 \cdot \frac{S_0}{729} + \ldots = S_0 + 3 \cdot \frac{S_0}{9}\left(1 + \frac{4}{9} + \frac{16}{81} + \ldots\right) = \frac{8}{5} S_0 = \frac{2\sqrt{3}}{5} a^2$

23. $S_1 = 8,\ S_2 = 12,\ S_3 = 14,\ S_4 = 15,\ S_5 = 15\dot{}5$

24. $S_1 = 3,\ S_2 = 5,\ S_3 = \frac{20}{3},\ S_4 = \frac{49}{6}$

25. Vsota neskončne vrste je 7.

26. a) $1,\ \frac{1}{3},\ \frac{1}{6},\ \frac{1}{10},\ \frac{1}{15}$ b) $a_n = \frac{2}{n(n+1)}$ c) 0
č) 2 d) 2

27. a) $\frac{1}{2},\ \frac{2}{3},\ \frac{3}{4},\ \frac{4}{5},\ \frac{5}{6},\ \ldots$ b) $S_n = \frac{n}{n+1}$ c) 1

OBRESTNO OBRESTNI RAČUN

1. a) 210 € b) $220{,}5$ € c) $231{,}53$ č) $325{,}78$ €
d) 180 € e) 162 € f) $145{,}8$ € g) $24{,}32$ €

2. a) 2050 € b) $2262{,}82$ € c) $3277{,}23$ €

3. Dobimo $55{,}98$ € obresti.

4. Branko je imel na računu $2260{,}60$ €.

5. Tina je vložila na banko 4000 €.

6. Banka uporablja obrestno mero $2{,}83\ \%$.

7. Čez 9 let.

8. Vložiti moramo $7018{,}06$ €.

9. Čez 34 let.

10. a) 11 822,07 € b) Čez 8 let. c) Čez 11 let. č) Čez 29 let.

11. a) $r_r = 1{,}01000,\ r_k = 1{,}00995$ b) $r_r = 1{,}00167,\ r_k = 1{,}00165$
c) $r_r = 1{,}00005,\ r_k = 1{,}00005$ č) $r_r = 1{,}00500,\ r_k = 1{,}00496$

12. a) 1002 € b) 1010,04 c) 1024,27 €

13. a) 2000,14 € b) 2006,78 € c) 2012,21 € č) 2050 €

14. a) 1010 € b) 1018,14 €

15. a) 3038,71 € b) 3038,33 c) 3038,00 €.

16. a) 5034,36 € b) 5033,94 € c) 5035,12 €

17. Čez pol leta ima Alja 0,96 € več na banki kot Pia.

18. a) 57 457,87 € b) 21,49 % c) Čez 7 let.

19. a) 3450 € b) 3900 € c) 3052,5 č) 3004,93 €

20. a) 5083,94 € b) 5082,99 € c) 5083,33 €

21. a) 2 % b) 1,985 % c) 2,003 %

22. a) 6943,25 € b) 6942,56 € c) 6943,00 €

OBROČNA VPLAČILA IN IZPLAČILA

1. a) 4 256,33 € b) 4 152,52 €
2. a) 403, 72 € b) 504,13 €
3. a) 3706,54 € b) 2341,76 €
4. a) 168,16 € b) 126,40 €
5. a) 2066,97 € b) 2112,45 €
6. a) 1004,13 € b) 1006,20 €
7. Po štirih letih bo imela na računu 1005,97 €.
8. Ob 18. rojstnem dnevu bo imel na računu 6910,22 €.
9. Plačala sta 21,34 € obresti.
10. Posamezen obrok znaša 148,53 €.
11. Dobival bo 197,83 €.
12. Sedmica je bila vredna 2 335 064.86 €.
13. Miha bi prihranil 38,03 €.
14. Obrok bo 2979,96 €.
15. Posamezna vloga je znašala 4688,80 €.
16. Posamezen znesek bo znašal 3600,09 €.

17. a) Na računu je imel $3152{,}24$ €. b) Na računu je imel $3677{,}08$ €.

c) Posamezen znesek je bil $1862{,}13$ €.

18. Posamezen znesek je bil $991{,}76$ €.

19. a) Na računu bodo imeli $2103{,}84$ €.

b) Potrebnih je 25 pologov. Kuhinjo lahko kupijo če 24 mesecev.

c) Obrok za starše bi bil $108{,}18$ €, za stare starše $54{,}09$ € in za otroke $10{,}82$ €.

20.

Mesec	Stanje posojila na začetku meseca	Obresti	Anuiteta	Stanje posojila konec meseca
1.	1000	4,07	202,45	801,62
2.	801,62	3,27	202,45	602,44
3.	602,44	2,45	202,45	402,44
4.	402,44	1,64	202,45	201,63
5.	201,63	0,82	202,45	0

21.

Mesec	Stanje posojila na začetku meseca	Obresti	Anuiteta	Stanje posojila konec meseca
1.	500	2,39	84,74	417,66
2.	417,66	2,00	84,74	334,92
3.	334,92	1,60	84,74	251,79
4.	251,79	1,21	84,74	168,26
5.	168,26	0,81	84,74	84,33
6.	84,33	0,40	84,74	0

MATEMATIČNA INDUKCIJA

1. Iz prve trditve izvemo le, da pade prva domina. Iz druge trditve izvemo, da padejo vse domine.

2. a) $A(1)\colon\ D = \frac{1(1+1)}{2} = 1 = L$

$A(n) \Rightarrow A(n+1)\colon 1+2+3+4+\ldots+n+(n+1) = \frac{n(n+1)}{2} + (n+1) = \frac{(n+1)(n+2)}{2}$

b) $A(1)\colon\ D = \frac{1(1+1)^2}{2} = 2 = L$

$A(n) \Rightarrow A(n+1)\colon 2+7+15+\ldots+\frac{n(3n+1)}{2} + \frac{(n+1)(3n+4)}{2} =$

$= \frac{n(n+1)^2}{2} + \frac{(n+1)(3n+4)}{2} = \frac{(n+1)(n+2)^2}{2}$

c) $A(1)\colon\ D = 2+1 = 3 = L$

$A(n) \Rightarrow A(n+1)\colon 3+7+11+\ldots+(4n-1)+(4(n+1)-1) = 2n^2+n+4n+3 =$

$= 2n^2+5n+3 = 2(n+1)^2+(n+1)$

č) $A(1)\colon\ D = 2 = L$

$A(n) \Rightarrow A(n+1)\colon 2+6+10+\ldots+(4n-2)+(4(n+1)-2) = 2n^2+4n+2 = 2(n+1)^2$

d) $A(1)\colon\ D = \frac{1(5+1)}{2} = 3 = L$

$A(n) \Rightarrow A(n+1)\colon 3+8+13+\ldots+(5n-2)+(5(n+1)-2) =$

$= \frac{n(5n+1)}{2} + (5n+3) = \frac{5n^2+11n+6}{2} = \frac{(n+1)(5n+6)}{2}\ \frac{(n+1)^2(n+2)^2}{4}$

e) $A(1)$: $D = (1-1)\cdot 2^1 + 1 = 1 = L$

$A(n) \Rightarrow A(n+1)$: $1 + 2\cdot 2 + 3\cdot 2^2 + \ldots + n\cdot 2^{n-1} + (n+1)2^n =$

$= (n-1)2^n + 1 + (n+1)2^n = n\cdot 2^{n+1} + 1$

f) $A(1)$: $D = \frac{1}{4}\cdot 1\,(1)\,(1+1)\,(1+2)\,(1+3) = 6 = L$

$A(n) \Rightarrow A(n+1)$: $1\cdot 2\cdot 3 + 2\cdot 3\cdot 4 + \ldots + n(n+1)(n+2) + (n+1)(n+2)(n+3) =$

$= \frac{1}{4}n\,(n+1)(n+2)(n+3) + (n+1)(n+2)(n+3) = \frac{1}{4}\,(n+1)(n+2)(n+3)(n+4)$

g) $A(1)$: $D = \frac{1}{6}\cdot 1\,(1+1)\,(4\cdot 1+5) = 3 = L$

$A(n) \Rightarrow A(n+1)$: $1\cdot 3 + 2\cdot 5 + \ldots + n(2n+1) + (n+1)(2n+3) =$

$= \frac{1}{6}n\,(n+1)\,(4n+5) + (n+1)\,(2n+3) = \frac{1}{6}\,(n+1)\,(n+2)\,(4n+9)$

h) $A(1)$: $D = \frac{1}{6}\cdot 1\,(1+1)\,(4\cdot 1-1) = 1 = L$

$A(n) \Rightarrow A(n+1)$ $1\cdot 1 + 2\cdot 3 + \ldots + n(2n-1) + (n+1)(2n+1) =$

$= \frac{1}{6}n\,(n+1)\,(4n+3) + (n+1)\,(2n+1) = \frac{1}{6}\,(n+1)\,(n+2)\,(4n+3)$

i) $A(1)$: $D = 1(1+1)(4\cdot 1-1) = 1 = L$

$A(n) \Rightarrow A(n+1)$ $6\cdot 1 + 12\cdot 3 + \ldots + 6n(2n-1) + 6(n+1)(2n+1) =$

$= n(n+1)(4n-1) + 6(n+1)(2n+1) = (n+1)(n+2)(4n+3)$

j) $A(1)$: $D = 1(3\cdot 1-1) = 2 = L$

$A(n) \Rightarrow A(n+1)$: $1\cdot 2 + 2\cdot 5 + \ldots + n(3n-1) + (n+1)(3n+2) =$

$= n^2(n+1) + (n+1)(3n+2) = (n+1)^2(n+2)$

k) $A(1)$: $D = 1(3\cdot 1 + 6\cdot 1 + 1) = 10 = L$

$A(n) \Rightarrow A(n+1)$: $3\cdot 5 + 5\cdot 7 + \ldots + (2n+1)(2n+3) + (2n+3)(2n+5) =$

$= \frac{n(4n^2+18n+23)}{3} + (2n+3)\,(2n+5) = \frac{4n^3+30n^2+71n+45}{3} =$

$= \frac{(n+1)(4n^2+26n+45)}{3} = \frac{(n+1)(4(n+1)^2+18(n+1)+23)}{3}$

l) $A(1)$: $D = \frac{1\cdot(4\cdot 1+18\cdot 1+23)}{3} = 15 = L$

$A(n) \Rightarrow A(n+1)$: $2\cdot 5 + 5\cdot 8 + \ldots + (3n-1)(3n+2) + (3n+2)(3n+5) =$

$= n\left(3n^2+6n+1\right) + (3n+2)\,(3n+5) = 3n^3 + 15n^2 + 22n + 10 =$

$= (n+1)\left(3n^2+12n+10\right) = (n+1)(3(n+1)^2 + 6(n+1) + 1)$

m) $A(1)$: $D = \frac{3\cdot 1}{3\cdot 1+1} = \frac{3}{4} = L$

$A(n) \Rightarrow A(n+1)$: $\frac{3}{1\cdot 4} + \frac{3}{4\cdot 7} + \ldots + \frac{3}{(3n-2)(3n+1)} + \frac{3}{(3n+1)(3n+4)} =$

$= \frac{3n}{3n+1} + \frac{3}{(3n+1)(3n+4)} = \frac{3n+3}{3n+4}$

n) $A(1)$: $D = \frac{1}{4(5\cdot 1+4)} = \frac{1}{36} = L$

$A(n) \Rightarrow A(n+1)$: $\frac{1}{4\cdot 9} + \frac{1}{9\cdot 14} + \ldots + \frac{1}{(5n-1)(5n+4)} + \frac{1}{(5n+4)(5n+9)} =$

$= \frac{n}{4(5n+4)} + \frac{1}{(5n+4)(5n+9)} = \frac{n+1}{4(5n+9)}$

o) $A(1)$: $D = \frac{1}{3(5\cdot 1+3)} = \frac{1}{24} = L$

$A(n) \Rightarrow A(n+1)$: $\frac{1}{3\cdot 8} + \frac{1}{8\cdot 13} + \ldots + \frac{1}{(5n-2)(5n+3)} + \frac{1}{(5n+3)(5n+8)} =$

$= \frac{n}{3(5n+3)} + \frac{1}{(5n+3)(5n+8)} = \frac{5n^2+8n+3}{3(5n+3)(5n+8)} = \frac{(n+1)(5n+3)}{3(5n+3)(5n+8)} = \frac{n+1}{3(5n+8)}$

p) $A(1)$: $A\,(1) : D = \frac{1}{2(3\cdot 1+2)} = \frac{1}{10} = L$

$A(n) \Rightarrow A(n+1)$: $\frac{1}{2\cdot 5} + \frac{1}{5\cdot 8} + \ldots + \frac{1}{(3n-1)(3n+2)} + \frac{1}{(3n+2)(3n+5)} =$

$= \frac{n}{2(3n+2)} + \frac{1}{(3n+2)(3n+5)} = \frac{3n^2+5n+2}{2(3n+2)(3n+5)} = \frac{(n+1)(3n+2)}{2(3n+2)(3n+5)} = \frac{n+1}{2(3n+5)}$

r) $A(1)$: $A(1): D = \frac{1}{2(5\cdot1+2)} = \frac{1}{14} = L$

$A(n) \Rightarrow A(n+1)$: $\frac{1}{2\cdot7} + \frac{1}{7\cdot12} + \ldots + \frac{1}{(5n-3)(5n+2)} + \frac{1}{(5n+2)(5n+7)} =$

$= \frac{n}{2(5n+2)} + \frac{1}{(5n+2)(5n+7)} = \frac{5n^2+7n+2}{2(5n+2)(5n+7)} = \frac{(n+1)(5n+2)}{2(5n+2)(5n+7)} = \frac{n+1}{2(5n+7)}$

3. a) $a_n = a_1 + (n-1)d$

$A(1)$: $D = a_1 + (1-1)d = a_1 = L$

$A(n) \Rightarrow A(n+1)$: $a_{n+1} = a_n + d = a_1 + (n-1)d + d = a_1 + nd$

b) $a_n = a_1 q^{n-1}$

$A(1)$: $D = a_1 q^{1-1} = a_1 = L$

$A(n) \Rightarrow A(n+1)$: $a_{n+1} = a_n \cdot q = a_1 \cdot q^{n-1} \cdot q = a_1 \cdot q^n$

c) $S_n = \frac{a_1+a_n}{2} \cdot n = \frac{2a_1+(n-1)d}{2} \cdot n$

$A(1)$: $D = \frac{a_1+a_1}{2} \cdot 1 = a_1 = L$

$A(n) \Rightarrow A(n+1)$: $S_{n+1} = a_1 + a_2 + \ldots + a_n + a_{n+1} = \frac{2a_1+(n-1)d}{2} \cdot n + a_{n+1} =$

$= \frac{2a_1+(n-1)d}{2} \cdot n + a_1 + nd = \frac{2a_1+nd}{2} \cdot (n+1)$

č) $S_n = \frac{a_1(q^n-1)}{q-1}$

$A(1)$: $D = \frac{a_1(q^1-1)}{q-1} = a_1 = L$

$A(n) \Rightarrow A(n+1)$: $S_{n+1} = a_1 + a_2 + \ldots + a_n + a_{n+1} = \frac{a_1(q^n-1)}{q-1} + a_{n+1} =$

$= \frac{a_1(q^n-1)}{q-1} + a_1 q^n = \frac{a_1(q^{n+1}-1)}{q-1}$

4. a) $A(1)$: $1^3 + 2\cdot1 = 3$, kar je res deljivo s 3.

$A(n) \Rightarrow A(n+1)$: $n^3 + 2n = 3k;\ k \in Z$ $(n+1)^3 + 2(n+1) =$

$= n^3 + 3n^2 + 3n + 1 + 2n + 2 =$

$= 3k + 3n^2 + 3n + 3 = 3k + 3(n^2 + n + 1) = 3(k + n^2 + n + 1)$, kar je res deljivo s 3.

b) $A(1)$: $1^5 - 1 = 0$, kar je res deljivo s 5.

$A(n) \Rightarrow A(n+1)$: $n^5 - n = 5k;$ $k \in Z$ $(n+1)^5 - (n+1) =$

$= n^5 + 5n^4 + 10n^3 + 10n^2 + 5n + 1 - n - 1 =$

$= 5k + 5n^4 + 10n^3 + 10n^2 + 5n = 5(k + n^4 + 2n^3 + 2n^2 + n)$, kar je res deljivo s 5.

c) $A(1)$: $5^{2\cdot1} - 1 = 24$, kar je res deljivo s 6.

$A(n) \Rightarrow A(n+1)$: $5^{2n} - 1 = 6k;$ $k \in Z$ $5^{2(n+1)} - 1 = 5^{2n} \cdot 5^2 - 1 = (6k+1)\cdot 25 - 1 =$

$= 150k + 24 = 6(25k + 4)$, kar je res deljivo s 6.

č) $A(1)$: $4^1 + 6\cdot1 + 5 = 15$, kar je res deljivo s 3.

$A(n) \Rightarrow A(n+1)$: $4^n + 6n + 5 = 3k;\ k \in \mathbb{Z}$ $4^{n+1} + 6(n+1) + 5 = 4\cdot4^n + 6n + 11 =$

$= 4(3k - 6n - 5) + 6n + 11 =$

$= 12k - 24n - 20 + 6n + 11 = 3(4k - 6n - 3)$, kar je res deljivo s 3.

d) $A(1)$: $4^{1+1} + 5^{2\cdot1+1} = 141$, kar je res deljivo s 3.

$A(n) \Rightarrow A(n+1)$: $4^{n+1} + 5^{2n+1} = 3k;\ k \in \mathbb{Z}$ $4^{n+1+1} + 5^{2(n+1)+1} = 4^{n+1}\cdot 4 + 5^{2n+3} =$

$= (3k - 5^{2n+1})\cdot 4 + 5^{2n+3} = 12k + 5^{2n+1}(-4 + 5^2) = 12k + 21\cdot 5^{2n+1} =$

$= 3(4k + 7\cdot 5^{2n+1})$, kar je res deljivo s 3.

e) $A(1){:}3^{2\cdot 1+1}+5^1=32,$ kar je res deljivo s 4.

$A(n)\Rightarrow A(n+1)$: $3^{2n+1}+5^n=4k;\ k\in Z\ 3^{2(n+1)+1}+5^{n+1}=3^{2n+1}\cdot 3^2+5^{n+1}=$

$=(4k-5^n)\cdot 9+5^{n+1}=36k-9\cdot 5^n+5^{n+1}=36k+5^n(-9+5)=$

$=4(9k-5^n),$ kar je res deljivo s 4.

f) $A(1)$: $3\cdot 5^{2\cdot 1+1}+2^{3\cdot 1+1}=391,$ kar je deljivo s 17.

$A(n)\Rightarrow A(n+1)$: $3\cdot 5^{2n+1}+2^{3n+1}=17k;\ k\in Z\ 3\cdot 5^{2(n+1)+1}+2^{3(n+1)+1}=$

$=25\cdot 3\cdot 5^{2n+1}+8\cdot 2^{3n+1}=17\cdot 3\cdot 5^{2n+1}+8\cdot(3\cdot 5^{2n+1}+2^{3n+1})=$

$=17\cdot 3\cdot 5^{2n+1}+8\cdot 17k=17(3\cdot 5^{2n+1}+8k),$ kar je res deljivo s 17.

5. a) $A(2)$: $5^2=25>12=6\cdot 2$

$A(n)\Rightarrow A(n+1)$: $5^{n+1}=5\cdot 5^n>5\cdot 6n=30n=6n+6+\underbrace{6(4n-1)}_{pozitivno\ \ za\ \ n\geq 2}>6n+6$

b) $A(5)$: $2^5=32>25=5^2$

$A(n)\Rightarrow A(n+1)$: $2^{n+1}=2\cdot 2^n>2\cdot n^2=(n+1)^2+\underbrace{n\,(n-2)-1}_{pozitivno\ \ za\ \ n\geq 5}>(n+1)^2$

c) $A(4)$: $1\cdot 2\cdot 3\cdot 4=24>16=2^4$

$A(n)\Rightarrow A(n+1)$: $1\cdot 2\cdot 3\cdot 4\cdot\ldots\cdot n\cdot(n+1)>2^n\cdot\underbrace{(n+1)}_{\text{več od 2 za n}\geq 4}>2^n\cdot 2=2^{n+1}$

č) $A(1)$: $1+1\cdot x=1+x\leq 1+x=(1+x)^1$

$A(n)\Rightarrow A(n+1)$: $(1+x)^{n+1}=(1+x)\cdot(1+x)^n\geq(1+x)(1+nx)=$

$=1+x+nx+\underbrace{nx^2}_{\geq 0}\geq 1+(n+1)\,x$

6. a) $\frac{1}{3},\ \frac{2}{5},\ \frac{3}{7},\ \frac{4}{9}\ldots;\ S_n=\frac{n}{2n+1}$

Dokaz enakosti $\frac{1}{3}+\frac{1}{15}+\ldots+\frac{1}{4n^2-1}=\frac{n}{2n+1}$

$A(1)$: $D=\frac{1}{2\cdot 1+1}=\frac{1}{3}=L$

$A(n)\Rightarrow A(n+1)$: $\frac{1}{3}+\frac{1}{15}+\ldots+\frac{1}{4n^2-1}+\frac{1}{4(n+1)^2-1}=\frac{n}{2n+1}+\frac{1}{4(n+1)^2-1}=\frac{n+1}{2(n+1)+1}$

b) $\frac{4}{5},\ \frac{8}{9},\ \frac{12}{13},\ \frac{16}{17}\ldots;\ S_n=\frac{4n}{4n+1}$

Dokaz enakosti $\frac{4}{1\cdot 5}+\frac{4}{5\cdot 9}+\ldots+\frac{4}{(4n-3)(4n+1)}=\frac{4n}{4n+1}$

$A(1)$: $D=\frac{4\cdot 1}{4\cdot 1+1}=\frac{4}{5}=L$

$A(n)\Rightarrow A(n+1)$: $\frac{4}{1\cdot 5}+\frac{4}{5\cdot 9}+\ldots+\frac{4}{(4n-3)(4n+1)}+\frac{4}{(4n+1)(4n+5)}=$

$=\frac{4n}{4n+1}+\frac{4}{(4n+1)(4n+5)}=\frac{4(n+1)}{4(n+1)+1}$

c) $\frac{1}{7},\ \frac{1}{6}=\frac{2}{12},\ \frac{3}{17},\ \frac{2}{11}=\frac{4}{22}\ldots;\ S_n=\frac{n}{5n+2}$

Dokaz enakosti $\frac{2}{2\cdot 7}+\frac{2}{7\cdot 12}+\ldots+\frac{2}{(5n-3)(5n+2)}=\frac{n}{5n+2}$

$A(1)$: $D=\frac{1}{5\cdot 1+2}=\frac{1}{7}=L$

$A(n)\Rightarrow A(n+1)$: $\frac{2}{2\cdot 7}+\frac{2}{7\cdot 12}+\ldots+\frac{2}{(5n-3)(5n+2)}+\frac{2}{(5n+2)(5n+7)}=$

$=\frac{n}{5n+2}+\frac{2}{(5n+2)(5n+7)}=\frac{n+1}{5(n+1)+2}$

7. **a)** $A(1)\colon\ D = 1(3+1) = 4 = L$

$A(n) \Rightarrow A(n+1)\colon\ 2\cdot 2 + 2\cdot 5 + \ldots + 2(3n-1) + 2(3(n+1)-1) =$

$= n(3n+1) + 6n + 4 = 3n^2 + 7n + 4 = (n+1)(3n+4)$

b) $A(1)\colon\ D = 2(2+1) = 6 = L$

$A(n) \Rightarrow A(n+1)\colon\ 2\cdot 3 + 2\cdot 7 + \ldots + 2(4n-1) + 2(4(n+1)-1) =$

$= 2n(2n+1) + 8n + 6 = 4n^2 + 10n + 6 = 2(n+1)(2n+3)$

c) $A(1)\colon\ D = 2(1+1) = 4 = L$

$A(n) \Rightarrow A(n+1)\colon\ 1\cdot 4 + 2\cdot 10 + \ldots + n(6n-2) + (n+1)(6(n+1)-2) =$

$= 2n^2(n+1) + 6n^2 + 10n + 4 = 2n^3 + 8n^2 + 10n + 4 = 2(n+1)^2(n+2)$

č) $A(1)\colon\ D = 2(1+1)^2 = 8 = L$

$A(n) \Rightarrow A(n+1)\colon\ 1\cdot 8 + 2\cdot 14 + \ldots + n(6n+2) + (n+1)(6(n+1)+2) =$

$= 2n(n+1)^2 + 6n^2 + 10n + 8 = 2n^3 + 10n^2 + 16n + 8 = 2(n+1)(n+2)^2$

8. $A(1)\colon\ a_1 = 2^1 + 5^1 = 7$

$A(2)\colon\ a_2 = 2^2 + 5^2 = 29$

$A(n) \Rightarrow A(n+1)\colon\ a_{n+1} = 7a_n - 10a_{n-1} = 7(2^n + 5^n) - 10(2^{n-1} + 5^{n-1}) = 2^{n+1} + 5^{n+1}$

9. $A(3)\colon\ a_3 = a_2 + a_1 = 7 < 8 = 2^3$

$A(4)\colon\ a_4 = a_3 + a_2 = 11 < 16 = 2^4$

$A(n) \Rightarrow A(n+1)\colon\ a_{n+1} = a_n + a_{n-1} < 2^n + 2^{n-1} = 3\cdot 2^{n-1} < 4\cdot 2^{n-1} = 2^{n+1}$

10. **a)** 1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, 21, 34, 55

b) $a_{n+2} = a_{n+1} + a_n$

c) $A(1)\colon\ a_1 = \frac{1}{\sqrt{5}}\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^1 - \frac{1}{\sqrt{5}}\cdot\left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^1 = 1$

$A(2)\colon\ a_2 = \frac{1}{\sqrt{5}}\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^2 - \frac{1}{\sqrt{5}}\cdot\left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^2 = 1$

$A(n) \Rightarrow A(n+1)\colon$

$a_{n+1} = a_n + a_{n-1} = \frac{1}{\sqrt{5}}\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^n - \frac{1}{\sqrt{5}}\cdot\left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^n + \frac{1}{\sqrt{5}}\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^{n-1} - \frac{1}{\sqrt{5}}\cdot\left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^{n-1} =$

$= \frac{1}{\sqrt{5}}\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^{n+1} - \frac{1}{\sqrt{5}}\cdot\left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^{n+1}$

č) $a_{20} = 6765$

d) L, L, S, L, L, S, L, L, S, L, L, S … Na mestih $3k$ je S, na mestih $3k+1$ in $3k+2$ je L. Stoti člen je liho število.

11. $A(1)\colon\ 2\cos\frac{\pi}{2^{1+1}} = 2\cos\frac{\pi}{4} = \sqrt{2}$

$A(n) \Rightarrow A(n+1)\colon\ \sqrt{2 + \underbrace{\sqrt{2 + \sqrt{2 + \ldots + \sqrt{2}}}}_{A_n}} = \sqrt{2 + 2\cos\frac{\pi}{2^{n+1}}} = \sqrt{2\left(1 + \cos\frac{\pi}{2^{n+1}}\right)} =$

$= \sqrt{2\left(\cos 0 + \cos\frac{\pi}{2^{n+1}}\right)} = \sqrt{4\cos\frac{\pi}{2^{n+2}}\cdot\cos\left(-\frac{\pi}{2^{n+2}}\right)} = 2\cos\frac{\pi}{2^{n+2}}$

12. Prav imata oba. Ker formula ne velja za $n = 1$, ne velja za nobeno naravno število n.

13. a) 28 b) 5050 c) $a_n = \frac{1+n}{2} \cdot n$

č) $A(1)$: $\frac{1+1}{2} \cdot 1 = 1$

$A(n) \Rightarrow A(n+1)$: $a_{n+1} = 1 + 2 + 3 \ldots + n + (n+1) = \frac{1+n}{2} \cdot n + (n+1) = \frac{2+n}{2} \cdot (n+1)$

14. $a_n = n^2$

$A(1)$: $1^2 = 1$

$A(n) \Rightarrow A(n+1)$: $a_{n+1} = 1 + 3 + 5 + 7 + \ldots + (2n-1) + (2n+1) =$
$= n^2 + (2n+1) = (n+1)^2$

15. $a_n = \frac{n(3n-1)}{2}$

$A(1)$: $\frac{1(3 \cdot 1 - 1)}{2} = 1$

$A(n) \Rightarrow A(n+1)$: $a_{n+1} = 1 + 4 + 7 + \ldots + (3n-2) + (3n+1) =$
$= \frac{n(3n-1)}{2} + (3n+1) = \frac{(n+1)(3n+2)}{2}$

16. a) $A(8)$: Poštnino za 8 centov lahko plačamo z znamkama za 3 cente in 5 centov.

$A(n) \Rightarrow A(n+1)$:

- Če smo poštnino za n centov plačali z vsaj eno znamko za 5 centov, to znamko nadomestimo z dvema znamkama za 3 cente in tako plačamo poštnino za $n+1$ centov.
- Če smo poštnino za n centov plačali le z znamkami za 3 cente, smo uporabili vsaj tri znamke za 3 cente. Tedaj tri znamke za 3 cente nadomestimo z dvema znamkama za 5 centov in tako plačamo poštnino za $n+1$ centov.

b) $A(4)$: Poštnino za 4 cente lahko plačamo z dvema znamkama za 2 centa.

$A(n) \Rightarrow A(n+1)$:

- Če smo poštnino za n centov plačali z vsaj eno znamko za 5, to znamko nadomestimo s tremi znamkami za 2 centa in tako plačamo poštnino za $n+1$ centov.
- Če smo poštnino za n centov plačali le z znamkami za 2 centa, smo uporabili vsaj dve znaki za 2 centa. Tedaj dve znamki za 2 centa nadomestimo z eno znamko za 5 centov in tako plačamo poštnino za $n+1$ centov.

c) $A(24)$: Poštnino za 24 centov lahko plačamo z dvema znamkama za 5 centov in dvema znamkama za 7 centov.

$A(n) \Rightarrow A(n+1)$:

- Če smo poštnino za n centov plačali z vsaj dvema znamkama za 7 centov, dve znamki za 7 centov nadomestimo s tremi znamkami za 5 centov in tako plačamo poštnino za $n+1$ centov.
- Če smo poštnino za n centov plačali z manj kot dvema znamkama za 7 centov, smo morali uporabiti vsaj štiri znamke za 5 centov. Tedaj štiri znamke za 5 centov nadomestimo s tremi znamkami za 7 centov in tako plačamo poštnino za $n+1$ centov.

17. $A(1)$: Takrat imamo dve moštvi, ki odigrata največ eno tekmo, kar je res manjše ali enako 1^2.

$A(n) \Rightarrow A(n+1)$: Imamo $2n+2$ moštev. Izberimo dve moštvi, ki sta odigrali medsebojno tekmo. Če taki moštvi ne obstajata, je bilo odigranih 0 tekem, kar je manjše ali enako $(n+1)^2$. Preostalih 2n moštev je po $A(n)$ odigralo največ n^2 tekem. Izbrani moštvi nista odigrali tekme z istim moštvom, saj bi tedaj obstaja tri moštva, ki so medseboj odigrala tri tekme. Torej sta odigrali največ 2n tekem. Skupno število tekem je torej največ $n^2 + 2n + 1$, kar je enako $(n+1)^2$. Odigranih je bilo največ $(n+1)^2$ tekem.